ЛЕВ КАТОЛИН

„Мы были тогда дерзкими парнями...“

ЛЕВ КАТОЛИН

«Мы были тогда дерзкими парнями...»

Издательство «Знание»
Москва 1973

3К16
К29

Лев Католин

К29 «Мы были тогда дерзкими парнями...»
М., «Знание», 1973, с. 160.

В книге рассказывается об увлечении К. Маркса математикой, в частности дифференциальным исчислением, о судьбе его математических рукописей, расшифрованных, изученных и подготовленных к печати советскими учеными.

1—1—3

Т. п. 1972 г.— 141 3К16

В этой книге рассказывается об одной малоизвестной области научных интересов Карла Маркса—о его занятиях математикой. Проблемы, волновавшие его в этой науке, отнюдь не просты для понимания. И тем не менее как бы далек от точных наук ни был читатель, у него нет оснований страшиться разверзающейся перед ним «бездны премудрости». Ведь речь пойдет не о самой математике, а о том, что увлекло в ней Маркса. Маркса, которого волновали самые основы любой проблемы — настолько общие и глубокие, что они представляют интерес для каждого, кто привык мыслить. Маркса, который любое дело озарял светом своей гениальности.

А то, что гениально, то просто.

□□ Роль автора этой книги весьма и весьма скромна: он лишь рассказал о судьбе самих математических рукописей Маркса и о тех людях, благодаря которым они увидели, наконец, свет, попытался изложить результаты большого научного труда, который выпущен в свет Институтом марксизма-ленинизма. Труд этот — его объем превышает шестьсот книжных страниц — подготовлен под руководством ныне покойной Софьи Александровны Яновской, профессора МГУ, одного из крупнейших в нашей стране специалистов в области методологии, философии и истории математики. Без ее помощи, без бесед с нею эти строки никогда не могли бы быть написаны, и потому с чувством глубокой благодарности они посвящаются ее памяти.

... Что за польза мне от субъекта, знающего всю математическую литературу, но не понимающего математики?

К. МАРКС

...Для диалектического и вместе с тем материалистического понимания природы необходимо знакомство с математикой и естествознанием. Маркс был основательным знатоком математики...

Ф. ЭНГЕЛЬС

...Открытие дифференциального и интегрального исчислений невозможно было бы без фантазии.

В. И. ЛЕНИН

Глава I.
«ВСЕ ТАЙНЫ ЭТОГО ЧЕРДАКА»

После смерти бедного Мавра Тусси в ответ на мой вопрос сообщила мне, что он сказал ей; чтобы она и я распорядились всеми его бумагами и позаботились об издании того, что следует издать, особенно второго тома[1] и математических работ.

В данный момент я вынужден... ждать в будущем случая, который позволил бы мне собрать и опубликовать добытые результаты,— быть может, вместе с оставшимися после Маркса рукописями по математике, имеющими в высшей степени важное значение.

Фридрих Энгельс

1

И все-таки это было веселое занятие!

Ждал ли он, что эти старые бумаги, пропыленные, оставшиеся без хозяина рукописи-сироты, возвратят его к молодости? Думал ли, что бисерные строки толстых записных тетрадей, строки, которыми был отмечен каждый день человека, так недавно ушедшего из жизни, дадут ему радость, а не боль?

Никто и не предполагал, конечно, что он разрыдается на этом полутемном чердаке. Слишком он был для этого философ. Философ и мужчина. Но чтобы старые рукописи принесли ему минуты веселья — этого он, пожалуй, и сам от себя не ждал. И потому писал дочери Маркса, Лауре Лафарг, в Париж, словно споря с ней и с собой:

«Уверяю тебя, мне очень забавно наталкиваться на эти старые вещи, бóльшая часть которых касается меня в та-

[1] Имеется в виду второй том «Капитала».

кой же мере, как и Мавра, и там так много такого, над чем можно посмеяться. Ним помогает мне — требуется вытирать огромное количество пыли! И мы от души смеемся, вспоминая старые времена... Но прежде чем мы проникнем во все тайны этого чердака, полного ящиков, пакетов, свертков, книг и т. д., должно пройти некоторое время...»

И снова — Лауре, через десять дней, 2 июня 1883 года:

«Среди бумаг Мавра я нашел целую кучу рукописей... Некоторые из них я скоро опубликую.

Одну рукопись я прочту тебе, когда ты будешь здесь; ты лопнешь от смеха. Я читал ее Ним и Тусси; Ним сказала: теперь-то я знаю, почему вы оба тогда в Брюсселе так хохотали по ночам, что ни один человек в доме не мог спать. Мы были тогда дерзкими парнями, поэзия Гейне — детски невинная штука в сравнении с нашей прозой».

(«Поэзия Гейне — детская игрушка по сравнению с нашей дерзкой, веселой прозой. ...Я хохотал до упаду, когда перечитывал старые рукописи»,— почти в тех же словах рассказывал Энгельс о своих переживаниях Э. Бернштейну дней десять спустя.)

И Лаура, и ее младшая сестра Элеонора — Тусси, и Ним — Ленхен, Елена Демут, по сути, член семьи Марксов, а вовсе не прислуга, припомнившая, как когда-то в брюссельском изгнании Мавр, прозванный так за смуглый цвет лица и черные, как смоль, волосы, с упоением писал вместе с Энгельсом «Немецкую идеологию» и на чем свет стоит честил «истинных социалистов»,— все они знали, что будь Маркс сегодня с ними, он бы тоже «от души смеялся, вспоминая старые времена»,— так, как он это умел...

2

Нашел ли Энгельс тогда, весной 1883 года, на чердаке дома 41 на Мейтленд-парк-род тетради с конспектами и записями по математике? Должно быть, нашел, во всяком случае уже в конце июня этого года он пишет своему и Марксову старинному другу Фридриху Зорге: «Есть там также 3—4 тетради математических работ...» Старые конспекты двадцатилетней давности по коммерческой арифметике, по алгебре и тригонометрии не могли не оказаться на чердаке, они наверняка отправились туда в свое время. И наверно, листая страницы тетрадей, перечеркнутые карандашом,— в знак того, что материал использован и пошел в дело,— Энгельс подумал о том, что само дело так и осталось неоконченным, хотя последние рукописи по математике лежали в рабочем кабинете Маркса до дня его смерти. Осталось неоконченным, как многие иные труды последних лет.

И еще, разбирая эти страницы и страницы конспектов по агрономии и физиологии, по геологии и истории, Энгельс вспомнил, наверное, слова, которые так недавно говорил над могилой Маркса. Это был последний, самый последний, прощальный разговор — такой короткий и такой продуманный. Он долго отбирал для него каждое слово. И не забыл — не мог забыть — об увлечении последних лет жизни Маркса: о его математических работах. «...Маркс делал самостоятельные открытия в каждой области, которую он исследовал,— даже в области математики,— а таких областей было очень много, и ни одной из них он не занимался поверхностно»,— говорил Энгельс в тот мартовский день на Хайгетском кладбище, и, конечно же, в памяти его были последние «математические» письма, полученные совсем недавно.

Почему Маркс занялся математикой? Да просто потому, что это доставляло ему радость. И если первое его знакомство с математическими трудами было делом необходимости — того требовали экономические расчеты в его работах, то все последние годы он обращался к математике, когда хотелось отдыха и выдавалась свободная минута. «В свободное время занимаюсь дифференциальным и интегральным исчислением»,— писал он Энгельсу. Математика приносила радость, как всякое движение человеческой мысли, а мышление было для него высшим наслаждением. Красивым сцеплением идей он упивался всюду, где находил его, смаковал как знаток, как гурман и спешил поделиться со всяким, кто находился рядом,— из тех, конечно, кто способен был оценить красоту человеческой мысли. «Даже преступная мысль злодея величественнее и возвышеннее всех чудес неба»,— любил он повторять слова Гегеля. Чудеса Маркс ценил не слишком-то высоко, хотя любознательность и завела его как-то на представление, где демонстрировались фокусы спиритов. Впрочем, и тут его увлекла если уж не сила, так по крайней мере ловкость мысли, и особое удовольствие получил он, когда фокусник признался, что он «не настолько прост, чтобы объяснить публике, как он это делает, так как в противном случае она перестанет бывать на его представлениях».

Но больше всего его влекли идеи, преображающие мир. Здесь азарт постижения уводил его к первоистокам наук. Нет, это не было ни гимнастикой ума, ни вынужденной платой за знания, хотя Маркс сам повторял не раз, что идеи, революционизирующие науку, не бывают популярными — их популяризуют потом. Он был рад платить эту цену и получать сведения из первых рук. Он следовал извилистыми ходами чужой мысли, поглощенный самим движением, но не переставал наблюдать этот путь

со стороны. И как же он смеялся, натыкаясь на след ложных шагов и понимая их причины и следствия! В этом упоительном процессе приобщения к истине не было ни тени священнодействия, ни грана пиэтета, и при всей его основательности — мальчишеская дерзость и непочтительность, и ничего от тех постных достоинств прусских приват-доцентов, которых Энгельс, любитель и знаток диалектов, припечатал берлинским словечком «Ernscht» — «сурьезность».

4

Из десяти последних писем, которые Энгельс получил от Маркса из Вентнора и которые для него, Энгельса, все еще не превратились в архивные документы, а так и оставались последними письмами, одно посвящено опытам по передаче электроэнергии на большие расстояния и другое — математике. В этом курортном городке на небольшом острове Уайт у южного побережья Англии Маркс пытался спастись от лондонской непогоды, а нашел лишь яростный ветер, бушующий постоянно, и непрестанные дожди. Мучимый застарелым бронхитом, терзаемый приступами кашля, который теперь при всяком волнении хватал его за горло, «как хватал Красный Вольф своего брата, хлебного ростовщика», вынужденный в непогоду дышать через респиратор, Маркс писал Энгельсу:

«Дорогой Фред!

Что ты скажешь об опыте Депре на Мюнхенской электрической выставке? Уже примерно год, как Лонге обещал мне достать работы Депре (специально для доказательства, что электричество допускает передачу силы на большое расстояние при посредстве простой телеграфной проволоки). ...Лонге, по своему обыкновению, каждый раз забывал прислать мне это».

Что поделаешь, у Маркса были очень милые, но не слишком обязательные зятья, и умер он, так и не дождавшись обещанных мужем его старшей дочери Женни Шарлем Лонге статей. А должен он был получить не больше и не меньше, как парижские журналы «Электрический свет» и «Электричество», которые читались лишь специалистами-электротехниками, да и то не всеми. Он ждал эти журналы с нетерпением, раззадоренный газетными сообщениями о демонстрации первой опытной линии электропередачи между Мисбахом и Мюнхеном, предвидя новый переворот в промышленности («Плохо теперь быть «стариком» и иметь возможность лишь предвидеть, вместо того, чтобы видеть самому»,— писал он дочери о своих взаимоотношениях с будущим), принялся читать и конспектировать книгу Госпитале «Современная физика. Основное применение электричества».

А в конце ноября того же 1882 года из Вентнора от Маркса пришло письмо о математике — ответ на критические замечания Сэма Мура, который прочел и не понял Марксову рукопись об обосновании дифференцирования. Энгельс сам ответил тогда Муру, и Маркс в своем письме лишь добавил к этому несколько строк, обрисовав путь дифференциального исчисления от Ньютона до Даламбера... Пока он писал, в Вентноре выглянуло солнце, и Маркс, истосковавшийся по хорошей погоде, оборвал себя на полуслове:

«Вот как раз показывается солнце, подходящий момент для прогулки, а потому не стану распространяться в этом письме pro nunc[1] о математике, но позднее при случае вернусь подробно к различным методам».

Такого случая больше уже не представилось...

[1] pro nunc — в данный момент, теперь (лат.).

5

И вот теперь посреди полутемного чердака, заваленного рукописями, в молчаливом царстве замыслов и планов, Энгельс думал о том, что же произойдет с их перепиской, с черновиками, которые успели и не успели превратиться в книги и статьи. Все это были вещи сугубо личные, потому что обществу может принадлежать лишь то, что человек сам отдает ему во владение и на суд. Здесь же, в этих набросках и письмах, могли быть догадки, не до конца подтвержденные логикой рассуждений, выводы без твердой опоры на факты, предположения, сомнительные подчас и для самого автора, и, наконец — ошибки, ибо без них не обходятся при отыскании истины. Энгельс и сам был строг к своим творениям, отличаясь здесь педантизмом, казалось бы, не свойственным его увлекающейся натуре, но даже его порой выводила из себя щепетильность Маркса, не решавшегося, как утверждали знавшие его люди, напечатать ни одной фразы, которой он не мог бы доказать множеством различных способов. А форма — литературная отделка, на которую Маркс тратил столько времени, перекраивая и переписывая наново свои работы! Ведь Марксу была невыносима сама мысль появиться перед людьми с вещью, не доработанной до конца. Только ему, Энгельсу, мог Маркс показать рукопись, когда в ней еще не выправлена последняя запятая. Если же она попадала в руки кому-то еще — это было для него чистым мучением. И чувство это было столь болезненно, что он даже сказал однажды, что лучше сожжет свои рукописи, чем оставит их неоконченными.

Через две недели после смерти Маркса Энгельс писал Петру Лавровичу Лаврову, русскому социологу и публицисту, с которым они с Марксом были дружны: «...он всегда скрывал от нас, в каком состоянии его работы. Он понимал: если мы узнаем, что у него что-нибудь готово, то

будем приставать к нему до тех пор, пока он не согласится это опубликовать».

И вот теперь эти рукописи окружают Энгельса... Да, он отложит свою философию наук, над которой работал уже десять лет, и подготовит труды Маркса к печати. Но ведь и его жизни не хватит на это. Да и кто знает, сколько отпущено ему самому?

И через десять дней после письма Лауре о дерзкой и веселой прозе Энгельс пишет о рукописях, хранящихся на чердаке старого дома, в Цюрих Эдуарду Бернштейну — одному из тогдашних лидеров немецкой социал-демократии, который в это время редактировал в Швейцарии, подальше от бисмарковских ищеек, газету немецких социалистов и не превратился еще в политического болтуна, предателя рабочего дела:

«Эта переписка, имеющая также и историческое значение, попадет, насколько это будет зависеть от меня, в надлежащие руки».

Мысль эта уже никогда, до самой смерти, не оставляла Энгельса.

«Все мы стремимся к тому, чтобы достойным образом увековечить память Мавра,— писал он Лауре Лафарг спустя еще несколько дней,— и начало этому будет и должно быть положено публикацией его посмертных сочинений. Давайте же по мере наших сил все будем содействовать достижению этой цели».

И когда гамбургское издательство Нестлера и Мелле предложило ему взять на себя редактирование «Библиотечки политической экономии», Энгельс вынужден был ответить:

«Милостивые государи!

Как ни лестно для меня предложение, содержащееся в вашем любезном письме... я вынужден, к сожалению, отклонить его из-за отсутствия времени.

Обязанности в связи с изданием рукописей Маркса и использованием прочих оставшихся после него материалов

целиком займут мое время на несколько лет и являются для меня долгом, перед которым все остальное должно отойти на задний план».

И уже много лет спустя — лет, беззаветно отданных редактированию и выпуску в свет сперва второго, а затем и третьего томов «Капитала», чтению корректур, просмотру переводов других произведений Маркса — на французском, итальянском, датском, голландском языках,— Энгельс вновь и вновь возвращается к мыслям и заботам, связанным с судьбой Марксовых рукописей. В конце июля 1893 года он пишет завещание — на всякий случай, воспользовавшись приездом Самюэла Мура, их общего с Марксом друга, юриста и переводчика на английский язык «Капитала» и «Манифеста Коммунистической партии», того самого Сэма Мура, который читал, но не сумел понять Марксовы математические работы. В нем есть такие строчки:

«Я распоряжаюсь, чтобы все литературные рукописи, написанные моим покойным другом Карлом Марксом, и все личные письма, написанные им или адресованные ему, которые ко времени моей смерти будут находиться в моем владении или распоряжении, были бы переданы моими душеприказчиками Элеоноре Маркс-Эвелинг, младшей дочери вышеупомянутого Карла Маркса...»

И еще через полтора года он посылает своим душеприказчикам уточняющее распоряжение:

«...Я хочу дополнить мое завещание следующими указаниями относительно оставленных мной бумаг, а именно:

а) Все бумаги, написанные рукой Карла Маркса (за исключением его писем ко мне), и все адресованные ему письма (за исключением моих писем к нему) должны быть возвращены Элеоноре Маркс-Эвелинг как законной представительнице наследников Карла Маркса».

И словно всех этих предосторожностей мало, уже на
 пороге смерти, письмо, адресованное Лауре Лафарг,—

одно из последних писем, Энгельс заканчивает словами о главной цели последних лет своей жизни:

«Относительно того, что ты пишешь о литературном наследстве Мавра и его судьбе в случае моей смерти, дело обстоит достаточно просто. Все это я *храню для вас*, это тебе известно; и, следовательно, после моей смерти вернется к вам. В завещании, которое я составил (когда Сэм Мур был здесь в позапрошлый раз), особого пункта нет, но в приложенных к завещанию инструкциях моим душеприказчикам содержится четкое распоряжение передать Тусси как исполнителю завещания все рукописи Мавра, написанные его рукой, а также все адресованные ему письма, за единственным исключением — моей собственной с ним переписки. А поскольку у Тусси, кажется, есть некоторые сомнения по этому вопросу, то, как только Сэм Мур летом вернется, я попрошу его составить новое завещание, в котором это будет ясно и недвусмысленно заявлено. Если у тебя есть какое-нибудь другое пожелание, дай мне, пожалуйста, знать».

Он и умер среди этих забот — передать оставшиеся после Маркса рукописи «в надлежащие руки»...

Глава II.
«НЕ ДЛЯ ПЕЧАТИ, А ДЛЯ УЯСНЕНИЯ ВОПРОСОВ САМОМУ СЕБЕ»

Читать — означает «брать в долг». Сделать на основе этого открытие — значит «уплатить долг».

Георг Лихтенберг

1

«При разработке основ политической экономии меня так чертовски задерживают ошибки в подсчетах, что с отчаяния я снова засел за быстрое прохождение алгебры. Арифметика никогда не давалась мне. Но окольным алгебраическим путем я скоро опять возьму правильный прицел»,— так 11 января 1858 года впервые в письмах Энгельсу Маркс упоминает о своих занятиях математикой.

«Арифметика никогда не давалась мне». Вряд ли Маркс мог быть доволен своими гимназическими познаниями в в этой области. И не потому, что плохо успевал в математических дисциплинах — нет, он по всем предметам был одним из лучших учеников Трирской гимназии. Но сам прусский гимназический дух не слишком располагал к постижению точных наук. Преподаватели, воспитанные на латинских текстах, воспринимали математику как варвара-пришельца и всячески старались изгнать ее из учебных курсов. Всего лишь за несколько лет перед тем как Маркс отправился на первый урок в Трирскую гимназию, влиятельный чиновник прусского министерства по делам культуры, просвещения и медицины, его высокопревосходительство тайный советник Иоганнес Шульце (тот самый,

что покровительствовал Гегелю) с пафосом утверждал: «В одной строке Корнелия Непота больше материала для образования, чем в двадцати математических формулах».

Правда, Марксу повезло на учителей. Директором и вместе с тем преподавателем истории и философии Трирской гимназии в годы его ученичества был Иоганн Виттенбах, один из образованнейших педагогов того времени. Прусские власти, естественно, не слишком жаловали его, а в последние годы жизни Виттенбах состоял даже под наблюдением полиции. Но еще бо́льшим свободомыслием отличался преподаватель математики и физики Иоганн Штайнинге́р — его обвиняли в злостной ереси: считали приверженцем материализма. Быть может, именно он сумел заронить в душу юного гимназиста Карла Маркса семена любви к строгости и красоте математики — семена, которые проросли много лет спустя...

Впервые после гимназии Маркс возвращается к математике, когда ему уже под тридцать. В одну из записных тетрадей 1846 года в заметки по политической экономии, в выписки из Шютца, Листа, Осландера, Рикардо врезаются семь страниц, испещренных формулами,— здесь решение уравнений первой степени, подсчет процентных отношений, вычисление степеней при дробных и отрицательных показателях, заметки по теории соединений, логарифмы, вычисление коэффициентов бинома Ньютона. Трудно сказать, конечно, относятся ли эти записи именно к 1846 году или сделаны позже на свободных листах тетради. Во всяком случае уже в 1851 году Маркс конспектирует книгу Поппе «История математики». Еще через несколько лет в подготовительных записях к работе «К критике политической экономии» возникают страницы геометрических чертежей, здесь же алгебраические выкладки, относящиеся к обобщению понятия степени и логарифма.

Но все это — занятия урывками, с длительными перерывами на много месяцев, а иногда и лет. Математика спасает Маркса, когда нет сил заниматься чем-либо другим.

«Писать статьи для меня теперь почти невозможно. Единственное занятие, которым я поддерживаю необходимое душевное равновесие, это — математика». Эти строки — из письма, посланного Энгельсу в ноябре 1860 года, когда все мыслимые несчастья — от постоянных материальных затруднений до тяжелой болезни верной и единственной Женни — свалились вдруг и все сразу на Маркса. Но и через двадцать лет, когда занятиям математикой отдавалась значительно бо̀льшая часть его времени и сил, он мог бы повторить эти слова — разве что трагические ноты звучали бы не так отчетливо, потому что годы эти, принесшие бесчисленные лишения и невосполнимые утраты, сделали Маркса более сдержанным.

В течение долгих лет математика помогала ему в самые трудные минуты его нелегкой жизни.

Зимой 1866 года, когда Маркс месяцами работал ночи напролет над «Капиталом», а дни отдавал делу создания Интернационала, когда нищета и тяжкий труд подорвали его здоровье, он пишет Энгельсу письмо, в котором сквозит отчаяние: «Дорогой Фриц! На этот раз дело шло о жизни... Если эта история повторится в той же форме еще три-четыре раза, то я обречен на смерть. Я отчаянно похудел и все еще дьявольски слаб, правда, ослабли не голова, а бедра и ноги. Врачи совершенно правы: главная причина этого рецидива — *чрезмерная ночная работа*. Но я не могу сообщить этим господам — да это было бы и совершенно бесцельно — о причинах, *вынуждающих* меня к этой экстравагантности». Тремя днями позже он вновь пишет Энгельсу, и в этих новых строках тяжесть его положения видна, пожалуй, еще отчетливее. Марксу вовсе не до шуток или «красивых» слов, он пишет с предельной простотой — как думает. Именно потому отчетливо видно, что мыслить математическими категориями уже стало частью его натуры. Даже в такую отчаянную минуту и даже в таком столь личном письме он вдруг использует математические значки и термины: «Вчера я опять лежал в постели,

так как вскочил злокачественный карбункул на левом бедре. Если бы у меня было достаточно денег, то есть > 0, для моей семьи и если бы моя книга была готова, мне было бы совершенно безразлично, сегодня или завтра быть выброшенным на живодерню, alias[1] издохнуть. Но при упомянутых условиях это пока не годится».

И у этого так неожиданно возникшего в письме к Энгельсу «> 0», и у математических фигур вроде «$\pm \infty \mp$» и «$\frac{0}{\infty}$» в письмах к Лауре и Элеоноре, написанных спустя несколько месяцев, была, вероятно, одна и та же причина и одна и та же цель. Мысль, даже кратковременная, о своем «тайном увлечении» приносила Марксу успокоение, давала силы, чтобы утешить горе — свое и людей, ему близких. «Наряду с поэтами и романистами у Маркса было еще замечательное средство для умственного отдыха — математика, к которой он питал особое пристрастие,— писал Поль Лафарг, друг и ученик Маркса, муж его дочери Лауры.— Алгебра служила ему даже нравственным утешением: он прибегал к ней в самые мучительные минуты своей беспокойной жизни. Во время последней болезни жены он не мог продолжать обычных научных занятий; и в этом тяжелом состоянии он мог сколько-нибудь успокоиться, только погружаясь в математику».

И все-таки, хотя математика была для Маркса «отдыхом души», он не только наслаждается приносимым ею покоем и умиротворенностью, но упрямо движется вперед, настойчиво выискивая в ней наиболее близкие своему сердцу разделы и идеи. Так он открывает для себя, наконец, дифференциальное исчисление. Здесь его математические интересы раздваиваются. Увлекшись высшей математикой, Маркс тем не менее продолжает осваивать и те разделы арифметики и алгебры, которые были необходимы ему для экономических исследований.

---

[1] alias — иначе говоря (англ.).

На математику по-прежнему не остается времени, и занятия ею по-настоящему становятся системой лишь с 1878 года, в последние пять лет жизни Маркса.

Но фундамент для самостоятельных математических исследований он к тому времени уже успел заложить, законспектировав сотни страниц учебников и специальных трудов.

2

В 1869 году, когда уже вышел в свет первый том «Капитала» и Маркс был всецело поглощен продолжением своего гигантского труда, он особенно пристально интересовался литературой, связанной с обращением денег. В одной из бесчисленных его записных тетрадей появляется конспект книги Гошена «Теория международного обмена». В этом солидном руководстве Маркс обратил особое внимание на правила операций с векселями вполне естественно, потому что они играли в то время большую роль в межгосударственных расчетах. Но вексельные курсы — это прежде всего вычисления, и Марксу пришлось научиться решать несколько типов специальных арифметических задач, для которых уже давно были придуманы особые правила — тройное, цепное, правило товарищества, смеси и т. п. И Маркс, не доверяя своим познаниям в арифметике («...Ты, кажется, с ней в довольно далеких отношениях,— судя по невыправленным позорным опечаткам в числах»,— писал ему Энгельс в мае 1864 года, комментируя взятый у Маркса учебник математики Франкера и считая, что раз Маркс держал книгу в своей библиотеке и не выправил опечатки в ней, то он несет за них всю меру ответственности), обращается к помощи крупных авторитетов — Феллера и Одерманна. Два директора коммерческих училищ выпустили книгу (она выдержала огромное ко-

личество изданий), незаменимую для любого серьезного коммерсанта. «Коммерческая арифметика» была сугубо практическим руководством, она давала возможность быстро и без особого труда разобраться в запутанной системе европейских платежных отношений. Иными словами, это был именно тот учебник, которого недоставало Марксу. Позже—«Капитал» выходил уже в третий раз—Энгельс вспоминал то время в предисловии к нему: «Когда появилось первое издание «Капитала», в Германии различных единиц меры и веса было столько, сколько дней в году; к тому же имелось два вида марок... два вида гульденов и по крайней мере три вида талеров... В естествознании господствовали метрические, на мировом рынке — английские системы меры и веса».

Маркс не стал изучать эту книгу «от корки до корки»— перед ним стояла частная, вполне определенная задача: разобраться в вексельных расчетах. Конспект поэтому начинается сразу же с четырнадцатой главы «Исчисление векселей, расчеты, связанные с вексельными курсами». Без труда покончив с техникой прямых вексельных расчетов между городами и странами, он вскоре прерывает конспект фразой, обращенной к самому себе: «Прежде чем перейти к *арбитражу на непрямом пути*, *Intermezzo...*»

Марксу, очевидно, нравилось это звучное слово — оно не раз встречается в его математических рукописях. Иногда он не отказывает себе в удовольствии употребить его еще раз — в конце «отступления». Тогда появляются написанные его характерным почерком слова: «Schluβ des Intermezzos».

«Интермеццо» оказалось весьма внушительным. Маркс переворошил еще пять глав книги, сопровождая конспекты порой довольно резкими замечаниями (*«обиходные скидки* — это чистое шарлатанство»). Запас знаний Маркса по коммерческой арифметике растет, и он считает свое отступление законченным. Снова следует глава четырнадцатая, и снова Маркс воюет с вексельным правом. Тет- 21

радь — объемистая тетрадь, в которых он привык вести свои конспекты, заканчивается, и Маркс начинает новую.

Это было в 1869 году. А в 1878 году он снова вернулся к этой книге, несмотря на то, что хорошо видел ее недостатки: Маркс просто не умел оставлять дело, если в нем имелась хоть малейшая для него неясность. В тот год он весьма интересовался экономической системой России и взялся за русскую книгу И. И. Кауфмана «Теория и практика банковского дела», которая вновь потребовала от него математических знаний.

Маркс был уже знаком, правда, заочно, с ее автором, который сам и прислал ему свою книгу из далекой России. «Появление первой части «Капитала» подало повод теперешнему профессору Петербургского университета Иллариону Игнатьевичу Кауфману написать весьма ученый и в общем сочувственный этюд в «Вестнике Европы»... Из всего написанного о «Капитале» в России Маркс всего более ценил статью Кауфмана»,— писал много лет спустя Максим Максимович Ковалевский, русский историк, социолог, этнограф и юрист, «сайентифик фрэнд» — «научный друг» Маркса. В тот год, когда появилась статья Кауфмана, Ковалевский как раз приехал из своего Харькова продолжать образование за границей и познакомился с Марксом.

«Сочувственный этюд» — это одна из первых рецензий на «Капитал» не только в России, но и вообще в мировой литературе. Она появилась в либеральном петербургском ежемесячнике всего через месяц после того, как 8 апреля 1872 года на полках книжного магазина А. Черкесова был выставлен первый том «Капитала» на русском языке. Кстати сказать, это был первый перевод гигантского труда на иностранный язык, он на три года опередил английский и на пятнадцать — французский. Кауфман прислал Марксу в Лондон «Вестник Европы» со своей рецензией, что было очень кстати: как раз в это время Маркс горько жало-

вался друзьям на заговор молчания, который составила вся европейская наука вокруг главного труда его жизни. И впоследствии, полемизируя с буржуазными критиками «Капитала», Маркс часто ссылался на эту рецензию, несмотря на то, что русский профессор так и не сумел правильно воспринять Марксову теорию трудовой стоимости. Рецензия Кауфмана была ценна другим — в ней, как писал потом Ленин, было дано «описание диалектического метода, которое Маркс выудил из бездны журнальных и газетных заметок о «Капитале» и перевел на немецкий язык потому, что эта характеристика метода, как он сам говорит, совершенно точна».

Маркс весьма ценил это описание своего диалектического метода, сделанное как бы «со стороны». Это видно хотя бы из того, что он цитирует его в «Послесловии» ко второму изданию своего «Капитала». Поэтому не удивительно, что Маркс обратился к труду именно этого автора, желая поглубже разобраться в тонкостях банковского дела, хотя труд этот и потребовал от него расширить свой математический багаж.

Книга Одерманна и Феллера вновь легла на стол. Да, опять она — глава четырнадцатая. Но теперь уже Маркс хочет кой-чему подучить Фридриха Эрнста Феллера с Карлом Густавом Одерманном: он пытается вывести общую формулу для облегченного вычисления сложных процентов. Директоры-соавторы, то ли по незнанию, то ли не желая забивать голову коммерсантов излишней премудростью, предлагали вычислять сложные проценты самым простым и длинным путем: год за годом находя искомые цифры. Но универсальная формула требовала знания логарифмов, и Маркс берется за них, достав книгу Сори «Полный курс математики», пятитомный труд французского аббата, профессора математики и натуральной философии из университета в Монпелье. Этот солиднейший источник математических знаний послужит Марксу еще не раз, а пока в экономические исследования вклинивается объемистая

«Вставка»: «*А*. Геометрические прогрессии, *В*. Арифметические прогрессии, *С*. Логарифмы».

Второй тетради тоже приходит конец, и неутомимый Маркс открывает еще одну, написав на обложке «3, следующая за Кауфманом 2». Экономист из России не господствует в ней безраздельно. Маркс успел уже к тому времени убедиться, что у Кауфмана глубокие знания экономики подменяются часто торжественностью стиля — он настолько вдохновенно воспевает спекулятивные операции биржевиков, что заставляет вспомнить о древнегреческом сочинителе парадных од. «...Я был несколько удивлен, увидев, что мой прежний рассудительный критик из петербургского «Вестника Европы» превратился в какого-то Пиндара современного биржевого плутовства,— пишет Маркс в Петербург Николаю Францевичу Даниельсону, переводчику «Капитала».— Кроме того, рассматривая эту книгу даже исключительно с точки зрения данной специальности,— а я вообще не ожидаю от книг этого рода ничего другого,— я нахожу ее далеко не оригинальной в ее частностях». Конспекту книги Кауфмана приходится потесниться, чтобы дать место очередным арифметическим выкладкам,и уже по одному этому она вполне сыграла свою роль, побудив Маркса еще раз обратиться к математике.

3

В записных тетрадях Маркса арифметике отведено самое скромное место. И даже первое упоминание Марксом о его занятиях математикой касается не столько арифметики, сколько алгебры: «...с отчаяния я снова засел за быстрое прохождение алгебры. ...Окольным алгебраическим путем я скоро опять возьму правильный прицел».

В этих строках из послания Энгельсу внимание привле-

кает мысль о том, что изучение математики проще и лучше начинать не с арифметики, а с алгебры (в наше время идея эта все увереннее проникает в педагогику). Любопытно, что через несколько лет, в мае 1864 года, Энгельс в письме Марксу выскажет сходные соображения.

Поводом для них послужил учебник математики, составленный французом Луи Бенжаменом Франкером. Энгельс тщательнейшим образом проштудировал экземпляр этой книжки из личной библиотеки Маркса. Они часто обменивались книгами, журналами, газетами, в случаях особо срочных даже пересылая их друг другу по почте. Нет, наверное, ни одной сколько-нибудь заметной книги или статьи, которая была бы прочтена одним и не рекомендована другому с указанием на особо любопытные места и с краткой, в нескольких словах, но исчерпывающей — а иногда убийственной — характеристикой всего произведения. Сообщения об отсылке и получении литературы почти всегда присутствуют в их письмах.

Итак, весной 1864 года Энгельс знакомится с учебником Франкера, принадлежащим Марксу, и пишет своему другу (колкая реплика из этого письма по поводу «позорных опечаток» уже приводилась): «Отдельные места весьма изящны, *практическая* же часть арифметики, напротив, постыдно плоха и поверхностно разработана. ...Сомневаюсь также, практично ли даже в элементарной форме излагать такие вещи, как корни, степени, ряды, логарифмы и т. д., при помощи *одних только* чисел (совершенно не прибегая к алгебре и по существу не предполагая у читателей даже элементарных алгебраических познаний). Как ни хорошо пользоваться числовыми примерами для иллюстрации, мне все же кажется, что ограничение в данном случае числами было бы менее наглядным приемом, чем простое алгебраическое изложение при помощи $a + b$, именно потому, что общее выражение в алгебраической форме проще и нагляднее, а без общего выражения здесь также не обойтись. Правда, это как раз та часть алгебры, которая

для математиков par excellence [1] — ниже их достоинства».

(Полтора десятилетия спустя злосчастному Франкеру снова достанется — на этот раз от Маркса, и теперь уже по поводу «новшеств», введенных им в дифференциальное исчисление. Маркс не забудет, как аттестовал Франкера Энгельс в письме от мая 1864 года, и помянет Франкера следующими словами: «известный [тебе] «элегантный» француз» — поскольку перевод одной из фраз письма Энгельса — «Einzelnes ist sehr elegant» — буквально означает: «Кое-что весьма элегантно» — с некоторым снисходительно-ироническим оттенком в адрес автора легковесного учебника.)

И Маркс, и Энгельс часто обращались к математической литературе, в том числе к истории математики, и далеко не всегда с целью какой-нибудь непосредственной пользы. Очень часто Маркса заинтриговывал частный вопрос, например, как ту или иную проблему разрешали древние математики, и он ворошил груду специальной литературы, пока не прояснял себе все до конца.

Следы математических проблем, волновавших двух великих друзей, остались не только в их переписке друг с другом, но даже и с третьими лицами. Энгельс, например, давая отчет дочери Маркса Женни Лонге о состоянии здоровья ее отца, писал в последний день мая 1881 года в Аржантей: «Что касается его простуды, то наступившая теплая погода скоро сведет ее к бесконечно малой величине». Порой «математические» нотки звучат в их письмах к совсем уж далеким людям. «... Один непризнанный великий математик письменно жаловался Марксу, будто я дерзновенно затронул честь $\sqrt{-1}$»,— писал много лет спустя в предисловии к новому изданию «Анти-Дюринга» Энгельс, рассказывая о том, как немецкий социал-демократ

[1] par excellence — по преимуществу (лат.).

Генрих Вильгельм Фабиан в ноябре 1880 года обратился к Марксу с просьбой приструнить Энгельса, позволившего себе высказаться по сугубо математическим проблемам. В письмах к Каутскому и Зорге, которые так же, как и Фабиан, знали, конечно, о Марксовых математических увлечениях, Энгельс уже после смерти Маркса сообщал об этом мелком, по сути дела, эпизоде, ему доставляло удовольствие всякое, даже незначительное воспоминание о том времени и «тайной страсти» Маркса — его занятиях математикой. Карлу Каутскому Энгельс пишет в апреле 1884 года в Цюрих об инциденте с Фабианом: «...он ополчился на мое диалектическое толкование математики и пожаловался Марксу, что я оклеветал $\sqrt{-1}$». А еще год с лишним спустя Энгельс советует Фридриху Адольфу Зорге в письме, отправленном в Хобокен, в далекую Америку: «Фабиана лучше всего совершенно игнорировать... Его главное обвинение по моему адресу заключается в том, что я в «Анти-Дюринге» злонамеренно оклеветал $\sqrt{-1}$, на что он уже жаловался в письме Марксу». «Математические» письма Маркса, беседы о сути этой науки не могли, конечно, не вспоминаться Энгельсу, когда Маркса уже не было с ним...

Для мыслей о математике Маркс находил время всегда, в самых неожиданных ситуациях. После смерти матери он, больной, провел два зимних месяца у своего дяди Лиона Филипса в Голландии, в Залтбоммеле. Болезнь дала Марксу некоторый досуг, а с ним — долгие разговоры с любознательным собеседником на самые разные темы — от древней истории до современной политики, от юриспруденции до строения мирового пространства. Возвратившись в Лондон, Маркс весной того же 1864 года пишет Лиону Филипсу, «славному старику», как он называл его, словно продолжая прерванную беседу:

«В Музее (речь идет о библиотеке Британского музея. — *Л. К.*) я прочел в книге Боэция «Об арифметике» (писатель времен переселения народов) о делении у римлян (*никак*

кого другого он, конечно, не знал). Отсюда и из других сочинений, которые я с ним сравнивал, вытекает следующее: не слишком большие вычисления, например, в домашнем хозяйстве и торговле, никогда не производились с помощью цифр, а лишь с помощью камней и других подобных знаков — на счетной доске. На этой доске было начертано несколько параллельных линий, и одни и те же камни или другие ощутимые знаки обозначали здесь на первой линии единицы, на второй — десятки, на третьей — сотни, на четвертой — тысячи и т. д. Такие счетные доски служили в течение почти всех средних веков и еще ныне употребляются китайцами. Что касается более значительных математических вычислений, то к тому времени, когда в них появилась надобность, римляне уже имели таблицу умножения или Пифагорову таблицу, правда, еще очень неудобную и громоздкую, так как таблица эта была составлена частью из особых знаков, частью из букв греческого (позднее римского) алфавита. ...Что при очень больших вычислениях старый способ создавал неодолимые препятствия, видно по тем фокусам, к которым прибегал выдающийся математик Архимед».

Так глубоко забирался Маркс даже в дебри нелюбимой им арифметики. Но еще пристальнее был его интерес к алгебре.

«...Я снова засел за быстрое прохождение алгебры».

Снова засел... Маркс любил подобное «повторение пройденного». Когда первый том «Капитала» лежал еще в исписанных его характерным почерком листках на письменном столе, в эти сугубо экономические рукописи частенько вклинивались математические формулы: линейные уравнения, сведения по комбинаторике, биноминальные коэффициенты. Но в этих же листках и начальные сведения из аналитической геометрии — уравнения прямой линии и окружности.

Подобных «математических отступлений» в трудах Маркса немало, просто до января 1858 года он не находил нужным сообщать кому бы то ни было, даже Энгельсу, об

этой стороне своих занятий. Но сами занятия отнюдь не были бессистемными.

В записке к Энгельсу, помеченной 6 июля 1863 года (в свое время будет любопытно привести ее полностью), Маркс сообщает, что перешел к изучению высшей математики. «Никаких предварительных знаний, кроме обычных алгебраических и тригонометрических вещей,— пишет он,— здесь не требуется, но необходимо общее знакомство с коническими сечениями».

В рукописях Маркса почти нет записей по тригонометрии, кроме сводки чисто элементарных сведений (двадцать три страницы, сам заголовок которых —«Резюме» — говорит об отношении автора к этому труду), никаких геометрических интересов, кроме конических сечений, зато «обычные алгебраические вещи» заняли более двухсот страниц.

Несмотря на свои экскурсы в математику древних и во многие разделы современной ему математики, Маркс не пытался «объять необъятное». Он очень определенно знал, к чему стремится в своих математических изысканиях, и уверенной рукой прокладывал свой путь в бескрайних просторах этой науки.

Двести двадцать две «алгебраические» страницы — это бетонные плиты, которые Маркс продуманно и терпеливо укладывал во взлетную полосу того невидимого аэродрома, с которого привыкла стартовать его мысль. Для ее свободного полета всегда был нужен надежный, уверенный разбег...

Так, продвигаясь все глубже и глубже в суть вопроса, привлекшего его внимание, захватывая все новые и новые страницы специальных трудов, Маркс готовил конспекты, записи, заметки, которые были для него необходимым началом всякой серьезной работы.

Предваряя свою книгу «К критике политической экономии» несколькими страницами предисловия, Маркс так оценил поистине титаническую подготовительную ра-

боту, проделанную им в области экономической науки, и те немалые усилия, которые еще потребуются для ее завершения: «Весь материал лежит предо мной в форме монографий, которые были написаны с большими перерывами в различные периоды не для печати, а для уяснения вопросов самому себе; последовательная обработка этих монографий по указанному плану будет зависеть от внешних обстоятельств».

Если бы когда-нибудь Марксу было суждено приступить к публикации своих математических работ, он мог бы предварить их теми же словами.

4

«Два курьера, выехавшие из двух городов в одно и то же время, двигаются в одном направлении, догоняя один другого, со скоростями b и c...»

Кого бы могла привлечь эта навязшая в зубах задача? Но Маркс именно ее высмотрел в учебнике Лакруа. (Ныне известный лишь специалистам по истории математики, в свое время этот труд французского академика «Элементы алгебры» считался одним из лучших и переиздавался более десяти раз. Он служил Марксу главным путеводителем по алгебре.) «Такая задача,— пишет далее Лакруа,— имеет случай, в котором она совершенно лишена смысла. Этот случай представляется, когда мы предполагаем, что они не могут никогда встретиться, так как сохраняют между собой исходный интервал. И эта абсурдность, которую никакое видоизменение формулировки задачи не может уничтожить, с полной очевидностью проявляется в уравнениях». И в самом деле, в них появляется бессмысленная в алгебре величина: число, поделенное на нуль. Раздел конспекта из тетради «Алгебра I» (есть еще и «Алгебра II» и еще отдельные «алгебраические» странички) так Марксом и назван: «Пер-

вое элементарное появление $\frac{a}{0} = \infty$ и $\frac{0}{0}$ в обычной алгебре». Тут на самых простых примерах он пробует понять, как скромная «обычная» алгебра переходит в исчисление бесконечно малых и бесконечно больших величин — иными словами, ищет, как он писал в своих математических рукописях, «прообразы» дифференциального анализа в алгебре.

Лакруа тоже пытался кое-что выяснить в этом абсурдном с его точки зрения примере. Он проделывает серию мысленных экспериментов. Первый курьер во всех них не изменяет своей скорости, выбранной Лакруа равной 6 километрам в час. Зато второй каждый раз наращивает темпы, проходя в час последовательно 5,8; 5,9; 5,99 и так далее километров. А значит, разница в скоростях курьеров (b — c) беспрерывно стремится к нулю, становясь бесконечно малой. Лакруа замечает по этому поводу лишь одно: этот процесс бесконечен. Но Маркса такой подход к делу устроить не может. Едва начав углубленно заниматься алгеброй, он уже поставил перед собой вопрос, который волновал его до самых последних дней жизни. А именно: как отражается движение и связанные с ним изменения переменной величины в операциях и формулах математики.

И потом, сколько Маркс ни конспектировал, сколько ни выводил формулу за формулой, составляя свои «монографии для самого себя», он всегда думал об этой проблеме, мимо которой прошли, не замечая ее или же не желая замечать, почти все математики, чьи труды побывали в его руках.

5

Маркс конспектирует—все его рукописи по алгебре носят, как уже говорилось, лишь самообразовательный характер. Но он вовсе не стремится «усвоить материал».

Нет, Маркс спорит, бунтует, даже если оппонентом оказывается такой гигант, как Эйлер.

Вот, к примеру, важный вопрос: каким образом в математике делается шаг от конечных — пусть очень малых, но все-таки имеющих вполне определенное значение — величин к бесконечным: бесконечно малым или бесконечно большим. Он познакомился с определением Бушарла — еще одного француза, благодаря которому сумел в непонятно короткий срок пробраться сквозь дебри алгебры. Вот оно во всей своей старомодной многословности: «Бесконечно малым называется количество очень малое, имеющее пределом нуль, которое может неограниченно убывать, не останавливаясь на каком-нибудь поддающемся оценке значении, которое можно считать меньшим всякого данного количества».

Ну и что? Достаточно этого, чтобы разобраться, о чем идет речь? Например, вызывает ли сомнение законспектированный Марксом отрывок из Эйлера издания «3-го года республиканской эры» [1].

«Здесь необходимо еще рассеять достаточно распространенную ошибку тех, кто считает бесконечно большое недоступным увеличению. Это мнение несовместимо с надежными началами, которые мы только что установили (а Эйлер ввел следующее равенство: единица, деленная на бесконечность, равна нулю, т. е., записывая эту фразу на языке алгебры, $\frac{1}{\infty} = 0$. Отсюда следует, что единица, деленная на нуль, дает бесконечность, т. е. $\frac{1}{0} = \infty$.— *Л. К.*); ибо, если $\frac{1}{0}$ обозначает бесконечно большоэ число, то, так как $\frac{2}{0}$ есть, несомненно, удвоенное $\frac{1}{0}$, ясно, что число, хотя бы и бесконечно большое, может стать еще в два или несколько раз больше».

[1] 1795 года.

К своим рассуждениям Эйлер добавляет выкладки, называя их «элегантным подтверждением».

Они и в самом деле изящны. Что значит разделить единицу на нуль? Стоит только выполнить «углом» — как в третьем классе школы — деление $\frac{1}{1-a}$, а затем приравнять в этой дроби «*a*» единице. Тогда получится, что $\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 \ldots$ и так далее, до бесконечности [1]. Иными словами, получаем ряд, сумма которого в алгебре записывается знаком ∞ — поверженной восьмеркой, призванной символизировать собой бесконечность. Вот вам и доказательство принятого ранее Эйлером априори равенства: $\frac{1}{0} = \infty$.

Все вроде бы безукоризненно, особенно учитывая эйлеровский авторитет.

Но Маркс не согласен!

«*Эйлер* в своих «Элементах алгебры» говорит...— пишет он,— было бы ошибкой думать, что бесконечно большое число не может возрастать. (Раньше он говорил, что ∞ получается от деления 1 на 0, так как $\frac{1}{0} = \frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + \ldots$ *до бесконечности*.)

Так как $\frac{1}{0}$ означает бесконечно большое число, а $\frac{2}{0}$ есть, без сомнения, удвоенное $\frac{1}{0}$, именно $= \frac{2-1}{0}$, то очевидно, что число, *даже бесконечно большое*, тем не менее может стать больше в 2, 3 или x раз.

Здесь, прежде всего, нужно заметить, что $\frac{2}{0}$ (или любой другой числитель с 0 в качестве знаменателя), разло-

[1] Как легко убедиться: $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$ до бесконечности.

женное в ряд, есть в точности то же, что и $\frac{1}{0}$, потому что $\frac{2}{0} = \frac{2}{2-2} = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ *до бесконечности*.

Следовательно... $\frac{2}{0} = \frac{1}{0} \ldots$ можно сказать только, что ряды по-разному шагают в бесконечность».

Так, не оробев перед авторитетом Эйлера, Маркс перефразирует его утверждение насчет того, что «число, хотя бы и бесконечно большое, может стать еще в два или несколько раз больше», подвергает его критике и в противоположность Эйлеру утверждает равенство: $\frac{1}{0} = \frac{2}{0}$.

...Так состоялась эта первая серьезная встреча с бесконечностью. С тех пор бесконечность — с ее внутренней противоречивостью, недоступная приземленному здравому смыслу, волновавшая всех философов, начиная с Аристотеля (великий учитель, как называли его бесчисленные последователи, писал когда-то: «Ведь нет ничего невозможного в том, чтобы оно (тело.— *Л. К.*) было разделено бесконечное число раз, хотя, пожалуй, оно не могло бы быть разделено вследствие ограниченности сил производящего деление человека»),— пленяет Маркса.

Она становится его математической любовью на всю жизнь.

И даже осенью 1866 года — самого, быть может, трудного и плодотворного года своей жизни, занятого подготовкой к печати первого тома «Капитала» и одновременно первого конгресса Интернационала,— Маркс все-таки не забывает об этом своем увлечении. Он пишет Лауре и Элеоноре, которые жили в то время в Гастингсе, шутливые письма. Чтобы не огорчать своих дочерей, он не позволил проникнуть в эти письма ни своей невероятной усталости, ни своим бесчисленным заботам и хворостям. Но вот как он начинает одно из них, адресованное младшей, Элеоноре: «Возлюбленный мой мэтр $\pm \infty \mp$! Склоняюсь до земли перед Вашей безмерностью, какую бы роль Вы ни

соблагоизволили взять на себя — бесконечно малых или бесконечно больших величин».

И в том, что в другом письме, старшей, Лауре, он тоже просит передать «наилучшие пожелания $\pm \infty \mp$», и в том, как подписывает он письмо Элеоноре: «Твой $\frac{0}{\infty}$», и в самом необычном прозвище, очевидно, не спроста придуманном для своей одиннадцатилетней дочки, которая, конечно же, не могла его даже как следует понять (как, впрочем, она едва ли что могла уловить и из слов, начинавших письмо отца, кроме их шутливого тона), — во всем этом отблеск тех мыслей о математической бесконечности, что не покидали Маркса до последних дней его жизни.

Интермеццо первое

Математический анализ столь же обширен, как и сама природа, он определяет все чувственные отношения, измеряет время, пространство, силы, температуры.
Огюст Фурье

1

Летом 1633 года, после допросов, растянувшихся на три с лишним месяца, Галилей опустился на колени в церкви святой Марии и произнес слова отречения.

Сто лет спустя бывший выученик дублинского Тринити-колледжа Джордж Беркли (тот самый, от философии которого камня на камне не оставил Ленин в «Материализме и эмпириокритицизме»), готовившийся к посвящению в сан епископа Клойнского, писал с известной долей добродушия: «Я не собираюсь вызывать инквизицию против математиков, я хочу лишь доказать, как мало именно они имеют права требовать строгого доказательства того, во что люди верят».

Связь между этими двумя событиями не столь поверхностна, как может показаться на первый взгляд. Если «святая инквизиция» не углядела в сочинениях Галилея подозрительного интереса к идее бесконечного, к бесконечно малым величинам, то исправлять ее упущение пришлось уже епископу англиканской церкви. «Недоработка» святых отцов не вызывает сомнения: ведь Галилей отверг установления божественного Аристотеля не только в том, что касалось строения Вселенной, но не посчитался и с его запретом на введение бесконечно малых в математику.

Мало того, Галилей совратил с пути истинного своего ученика Бонавентуру Кавальери, настоятеля монастыря ордена Иеронимитов, и плодом их многолетней переписки явилась книга Кавальери «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного». Кавальери учил определять размеры плоских фигур и тел, считая их сложенными из мельчайших — «неделимых» — частиц. Паутина, сотканная из отдельных, неуловимо тонких нитей, паук, непрерывно ткущий геометрию из неделимых,— вот тот образ пространства, который хотел он пробудить в читателе.

Есть что-то необъяснимое и счастливое в том, как человечество сумело сохранить в себе идею бесконечного, как пронесло ее через проклятия словом и огнем, через пожары библиотек, подожженных завоевателями и изуверами, через два тысячелетия войн и погромов. Деление пространства на бесконечно малые части идет от Демокрита и его учителя Левкиппа, через школу Платона, где родилась теория «атомных линий». Идея атомов, «неделимых», мельчайших, меньше которых уже и представить себе невозможно, осветила не только строение вещества, но и геометрию пространства. Треугольник рассматривался как сумма бесконечно большого числа парал-

лельных отрезков, причем ширина каждого отрезка считалась исчезающе малой — «атомной». Пирамиду представляли нарезанной на ломти треугольников, их было бесконечно много и каждый из них не толще «атома». Слово «бесконечный» не было еще под запретом, и математики древности с детской жадностью применяли новую идею к вычислению площадей и объемов.

Но вот появляется Аристотель. Его пуританской строгости в рассуждениях, его холодному уму, признающему лишь гладкие, совершенные, уравновешенные конструкции, претит буйство этого многозначного слова, не желающего укладываться в определения.

И в самом деле, что такое бесконечность? И что такое «атомный» треугольник? Есть ли толщина у этого ломтя пространства или толщины этой нет, и, следовательно, он не существует, и тогда сколько бы этих несуществующих треугольников мы ни громоздили друг на друга, нам никогда не получить пирамиды, имеющей реальный объем. И по наущению Аристотеля один из его учеников обрушивается на «атомные линии». В этом нападении не было ничего страшного, наоборот, призыв к известной трезвости и строгости был бы только полезен, если бы не тот непререкаемый авторитет, которым пользовался Аристотель у потомков на протяжении столетий. И надо было родиться Архимедом, чтобы, подчинившись аристотелевскому призыву к строгости, сохранить для себя идею бесконечно малых как метод рассуждения и анализа.

Архимед не просто сберег все, сделанное предшественниками, но настолько усовершенствовал этот способ вычисления поверхностей и объемов, что ему удалось отыскать площадь спирали, получившей его имя, площадь параболы, объем шара и даже площадь его поверхности. При этом он ни на йоту не отступил от самых жестких требований строгости: каждую задачу он решал как бы дважды — первый раз для себя, второй — для строгого критика. Для себя методом бесконечно малых он вычис-

лял нужную площадь или объем. Для критика, имея эту величину в руках и не давая себе труда объяснить, откуда она взялась, он показывал абсолютно строгими построениями, что она может быть только такой и не может быть ни больше ни меньше. Классический «метод исчерпывания» — метод перебора возможностей и доказательства того, что все они, кроме одной, приводят к абсурду. Да, к этому методу не придерешься!

Но каждого, кто столетия и даже тысячелетия спустя изучал элементарную геометрию, этот метод исчерпывания приводил в исступление! откуда же, черт возьми, автор доказательства знал с самого начала правильный результат? Не нашептал же его господь бог ему на ушко! И только когда в 1907 году копенгагенский филолог Гейберг напечатал архимедовское «Послание Эратосфену», получившее подзаголовок «Учение о методе», стало ясно, что все свои результаты Архимед получал сначала методом бесконечно малых и только потом строго доказывал их методом исчерпывания. В этом сочинении Архимед всегда рассматривает часть площади круга как составленную из «всех своих хорд», шар — как заполненный «всеми параллельными кругами» и признается, что некоторые результаты, позднее доказанные им строгим геометрическим путем, он сначала нашел именно этим способом.

3

...Но «Учение о методе» считалось безвозвратно утерянным, от сочинений Демокрита и Левкиппа уцелели лишь обрывки, а паровой каток Аристотеля так загладил геометрию, что в ней, казалось, не осталось и места для бесконечно малых. Сонм толкователей Аристотеля и не помышлял об их реабилитации. «Эти люди,— писал Галилей Кеплеру,— полагают, что философия — книга

вроде «Энеиды» и «Одиссеи» и что истину следует искать не в природе, а путем сравнения текстов». Галилей мог быть уверен в сочувствии адресата: Кеплера пытались отлучить от науки за пользование бесконечно малыми уже не именем Аристотеля, а именем Архимеда, хотя дух Архимеда настолько пронизал кеплеровскую «Новую стереометрию», что у историков впоследствии не однажды возникало сомнение: а не раздобыл ли он где-нибудь копию «Послания Эратосфену», утаив ее и от современников, и от потомков?

Впрочем, такое подозрение, конечно же, безосновательно. По намекам, по случайным обмолвкам, разбросанным в сочинениях Архимеда и его учеников, Кеплеру удалось гениально воссоздать тот метод вычисления с помощью бесконечно малых, которым Архимед пользовался «для себя». За два десятилетия до Кавальери и почти через два тысячелетия после Архимеда он вновь ввел бесконечно малые в математику, подсчитав этим способом объемы девяноста двух тел вращения довольно сложной формы.

Но всей гениальности великого астронома и геометра недостало бы для такой реконструкции, если бы не потомственная изустная память ремесленников, которую можно назвать инженерным фольклором. Идеи Демокрита и Архимеда не были достоянием лишь философских школ, они вошли в инструментарий греческих ремесленников и землемеров. Сквозь сито средневековых схоластов до времен Возрождения добрался лишь один-единственный чертеж, в котором можно усмотреть идеи бесконечно малых — треугольник, для вычисления площади разбитый на множество мельчайших прямоугольничков. Но ремесленники по-прежнему пользовались этим методом, определяя размеры сложных фигур, и передавали его из поколения в поколение.

Оно и понятно: кто бы ни занимался искоренением идей, плодами их он не переставал пользоваться. Чтобы

жить, надо было строить, чтобы строить, надо было вычислять. И если кардинал Барберини, бывший математик и бывший друг Галилея, ставший папой Урбаном VIII, отправил престарелого ученого «прогуляться» в зал пыток, то он и не подумал запретить морякам пользоваться галилеевыми звездными таблицами. Корабли везли в Европу золото и пряности, и тот, кто точнее определял курс, быстрее прибывал в порт назначения. И когда сто лет спустя епископ Беркли ополчился на бесконечно малые, он тоже не собирался оспаривать результаты дифференциального исчисления или запрещать пользоваться им — он хотел лишь искоренить «противоестественные» идеи...

А корабли все спешили в дальние страны, и капитаны направляли зрительные трубы астролябий на звезды, которые уже не были больше неподвижны. Инженеры и ученые изобретали новые машины, и челноки в зеве ткацких станков летали теперь, перебрасываемые рычагами, а не руками рабочих. Люди учились ценить скорость, и им нужно было уметь определять ее. Даже время бежало по-иному, и с тех пор как в часах появился маятник, счет времени пошел не на доли часа, а на доли минуты. А на земле шли войны и грохотали пушки, и нужно было, чтобы ядра летели как можно дальше и точно поражали цель. Артиллеристы и орудийные мастера рисовали кривые — траектории полета снаряда. Математики тоже рисовали кривые и поняли, что их можно не только вычерчивать, но и вычислять — каждой соответствует своя формула, так же как каждой формуле — своя кривая. Научились рассчитывать и касательные к кривым, и вскоре решенных задач на касательные оказалось едва ли меньше, чем задач на подсчет площадей. Результаты эти были, помимо прочего, ценны тем, что по касательной можно было определить скорость. И наконец, кембриджский математик Исаак Барроу выступил со своим знаменитым утверждением, что задачи на

площади и задачи на касательные тесно соприкасаются друг с другом и одна — как бы оборотная сторона другой. Поясняя свою мысль открытиями Галилея и Торричелли, он показал, что если направить на рисунке по горизонтальной оси равномерно текущее время и отложить вверх по оси значения пройденного пути, а вниз — величину скорости в каждый момент времени, то для каждого мгновения площадь, ограниченная нижней кривой, кривой скорости, будет пропорциональна пройденному пути, а по касательной к верхней кривой, изображающей путь, можно отыскать значение скорости.

Таким образом, получалось, что зная график пути, можно вычислить скорость; зная график скорости — подсчитать путь.

4

И, таким образом, еще и еще раз подтвердилась мысль Энгельса, вошедшая теперь в учебники и энциклопедии: «Как и все другие науки, математика возникла из *практических потребностей* людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики».

Если же потом, с течением времени, такие простые с виду вещи, как вычисление скорости по пройденному пути, вдруг превращались в целую науку со своими законами, правилами, сложностями, где уже и речи нет ни о пути, ни о скорости, а, напротив, возникают совершенно новые понятия — производная, дифференциал, то и тут нет ничего непонятного или даже необычного: так было и так есть со всеми науками. «...Как и во всех других областях мышления, законы, абстрагированные из реального мира, на известной ступени развития отрываются от реального мира, противопоставляются ему как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, с которыми мир должен сообразоваться. Так было с обществом

и государством, так, а не иначе, *чистая* математика *применяется* впоследствии к миру, хотя она заимствована из этого самого мира и только выражает часть присущих ему форм связей,— и как раз *только поэтому* и может вообще применяться»,— писал Энгельс в «Анти-Дюринге».

5

Когда на лукасовской кафедре в Кембридже у Исаака Барроу появился способный ученик Исаак Ньютон, а молодой магистр философии Готфрид Вильгельм Лейбниц почувствовал вкус к точным наукам и опубликовал свою первую математическую работу «Рассуждение о комбинаторном искусстве», все было готово к изобретению дифференциального и интегрального исчислений. Что это действительно так, показать просто: открытие было сделано англичанином и немцем независимо друг от друга в одно и то же десятилетие.

Но что, собственно, значит «изобрести исчисление»? Ведь поруганная честь бесконечно малых была уже восстановлена предшественниками Ньютона и Лейбница. Что же осталось на их долю? Им предстояло превратить метод рассуждений в метод вычислений. Кеплер и Кавальери, хоть и преуспели в пользовании бесконечно малыми, все же недалеко ушли от Архимеда, как и сам Архимед продвинулся в этом деле немногим дальше Демокрита. Все они совершенствовали словесный, так сказать, рассудительный подход к отдельным задачам, шлифовали идею. Надо было уловить то общее, что присуще всем задачам, и создать удобный и простой способ, которым бы решалась каждая из них. Требовался математический аппарат — своеобразное прокрустово ложе, в которое каждая задача укладывалась бы, в противоположность мифическому станку, без существенных потерь. Выражаясь языком современной техники, нужна была

прессформа: закладываете в нее податливую массу, одно нажатие пресса — и изделие готово.

Или, пользуясь еще одним современным сравнением, нужно было перейти от старой школьной программы по математике к новой. Ведь что представляла собой прежняя школьная математика до шестого класса? Это была чистая арифметика — мудреный свод правил о том, как решать каждый отдельный тип задачи: задача на части, на пропорции, на тройное правило, действие первое, действие второе, действие третье... Но весь этот задачник укладывается в четыре слова, которым школьника обучают по новой программе буквально на первых же уроках. Они просты: «обозначим неизвестное через икс...» И дальше мы уже переходим на новую, алгебраическую платформу — платформу решения уравнений, где есть свои законы и свои трудности, но это уже иные законы и иные трудности. А вся прежняя школьная арифметика исчерпалась четырьмя магическими словами — «обозначим неизвестное через икс».

Вот эти-то магические слова: обозначим то-то и то-то через то-то и то-то и предстояло произнести Ньютону и Лейбницу для задач на площади и касательные. Сказав их, они перевели бы отдельные задачи алгебры и геометрии на новую платформу — платформу дифференциального исчисления.

6

Бурный спор о том, кто изобрел дифференциальное исчисление — Ньютон или Лейбниц, два с лишним столетия лихорадивший различные математические школы, захватил и Энгельса. В предварительных заметках к «Диалектике природы», сделанных «для себя» и явно не рассчитанных на последующее появление в печати, а потому гротескно заостренных и резких, как мгновенная фотография мысли, остановленной для памяти, есть такие

строки: «...Лейбниц — основатель математики бесконечного, по сравнению с которым индуктивный осел Ньютон является испортившим дело плагиатором...» Энгельс был здесь небеспристрастен и, скорее всего, сам чувствовал это. Его увлекающейся натуре претила тяжеловесная методичность Ньютона, признававшего лишь один метод исследования — метод индукции, движение от фактов к обобщениям, и с презрительной категоричностью заявлявшего: «Hypotheses non fingo» — «Гипотез не измышляю». Но вот уже через два года, по-видимому, не без влияния частых бесед с Марксом, который как раз в это время постигал Ньютона и отзывался о нем с глубоким уважением, Энгельс не только пишет о Ньютоне и Лейбнице «на равных», но даже упоминает имя Ньютона первым — в соответствии с современными воззрениями, утверждающими, что Ньютон не только пришел к открытию дифференциального и интегрального исчисления независимо от Лейбница, но даже совершил это раньше него. А главное, переносит в своем высказывании центр тяжести со спора о личностях на анализ хода развития науки в целом, на соответствие достижений науки ее потребностям.

Снова парадоксально заостряя свою мысль, он высказывается в том духе, что изобретатели дифференциального исчисления заложили в его здание не первый, а последний камень: «Поворотным пунктом в математике была Декартова *переменная величина.* Благодаря этому в математику вошли *движение и* тем самым *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем».

И Энгельс снова возвращается к той же мысли о потребностях науки и общества, о том, как наука отвечает на запрос времени:

«Лишь дифференциальное исчисление дает естество-

знанию возможность изображать математически не только *состояния*, но и *процессы*: движение».

Каких бы трудов это ни стоило, дифференциальное исчисление было изобретено, поскольку таково было веление времени.

7

И еще одну трудность нужно было преодолеть великим мужам науки. Не из чистого каприза Аристотель воспротивился применению бесконечно малых: математика — наука строгая, и даже бесконечно малую величину не позволяет считать нулем без достаточных на то оснований. И Архимед отнюдь не из научного кокетства пользовался двумя методами — одним для себя, другим для публики — он понимал, что в различии слов «показать» и «доказать» есть глубокий смысл. Показав вначале результат, полученный с помощью бесконечно малых, которые вроде бы существуют и отличаются от нуля, Архимед утверждал затем, что результат точен и доказывал это. Доказательство строилось обычно на том, что при последовательном проведении приема, избранного для построения, эти бесконечно малые могут быть сделаны меньше «любой заданной телесной величины» и в пределе равны нулю. Для настоящего, строгого обоснования анализа бесконечно малых нужно было сплавить оба архимедовских метода — «для себя» и «для публики» — воедино.

Если с первой задачей — созданием аппарата нового исчисления — Ньютон и Лейбниц справились блестяще, передав его в наши руки почти таким, каким мы нынче пользуемся, то вторую задачу — обоснования — им так и не удалось решить, хотя Ньютон был почти у цели, и, окажись он более последовательным, наука обошлась бы без споров, растянувшихся на два столетия. Но не

ученый властвует над временем, в котором живет, а время над ним, и Исаак Ньютон семнадцатого столетия так и не смог превратиться в Огюста Коши девятнадцатого столетия.

8

Окажись он более последовательным...

Как часто представляем мы своим современником и единомышленником ученого, чья жизнь отделена от нашей столетиями! А ведь время не может не наложить отпечатка на его образ мышления. Путешественник, открывающий дорогу в новые, неизведанные земли, смотрит на возникающий перед ним незнакомый мир глазами сына своего времени и своей страны и не может смотреть иначе. Один из историков математики заметил, что тот, кто прокладывает пути к новым воззрениям, закладывает основы эпохального переворота в науке, сам чаще всего остается в плену старых представлений.

Мы привыкли считать Ньютона ученым, близким нам по духу, по взгляду на природу. Ведь недаром он не только разработал новые научные основы мироздания, но и изложил их в виде «Математических начал натуральной философии» — именно математических, как это сделал бы всякий современный нам физик.

И все же даже эти «Начала» написаны — полностью! — языком классической греческой геометрии. А уж вне математики — в физике и астрономии — Ньютон, создавший такой великолепный математический инструмент, как дифференциальное исчисление, вовсе не пользуется им, а предпочитает выражать свои идеи в духе греческих геометров. И если где-то ему не удавалось выдержать столь архаический даже для его времени стиль, то это, как он сам признавался, причиняло ему немалое огор-

чение. А чего стоит его склонность к алхимии, к древним апокалиптическим писаниям!

Лорд Кейнс, коллекционер и знаток неопубликованных рукописей Ньютона, так писал о нем: «Начиная с восемнадцатого столетия, Ньютона считают первым и величайшим ученым современного склада, рационалистом, научившим нас мыслить на основе трезвого и строгого анализа. Мне он представляется совсем иным. Да, я думаю, что мою точку зрения разделит каждый, кто попытается разобраться в содержимом ящика, который Ньютон упаковал перед тем, как в 1696 году окончательно оставил Кембридж. Ньютон не был первым представителем века разума. Он был последним из магов, последним из вавилонян и шумеров, последним великим умом, который смотрел как на зримый, так и на интеллектуальный мир такими же глазами, как и те, кто заложил основы нашего интеллектуального наследия немногим менее десяти тысяч лет назад. Исаак Ньютон, родившийся в Рождество 1642, вскоре после смерти отца, был последним чудо-младенцем, которому древние волхвы могли бы воздать искренние и достойные почести».

«Все, что нам известно об отношении Ньютона к математике, о его математическом стиле и вкусе, согласуется с выводами Кейнса»,— писал недавно Ф. Дж. Дайсон, известный современный ученый, профессор Принстонского университета.

9

...Когда Лейбниц обнаружил, что кое-что из его открытий, обсуждавшихся им в доверительных беседах с приятелями, начало просачиваться наружу, он поспешил вбить заявочный столб на новой математической делянке. В качестве такового должна была послужить статья в третьем номере начавшего незадолго перед тем выходить журнала ученых «Acta Eruditorum» за 1684 год. Лейб-

ниц перестраховался дважды — тем, что опубликовал эту статью, и тем, как он это сделал. Статья сжата настолько, что едва можно сообразить, что же хотел сказать автор, и это при том, что в черновиках сохранилось по крайней мере два наброска, изложенные куда понятнее! В этом не слишком благовидном деле ему основательно помогла и типография, оснастившая текст рекордным числом опечаток. Но как бы то ни было, в мемуаре с длинным названием «Новый метод нахождения наибольших и наименьших значений и определения касательных, не изменяющий в случае дробных или иррациональных величин и особый для этого род исчисления» уже заложен фундамент нового исчисления — дифференциального анализа. Лейбниц вводит понятие дифференциала как бесконечно малой разности двух соседних значений величины и обозначает его символом» «d» — первой буквой латинского слова «differentia», что значит «разность». Дифференциал от величины x отныне будет обозначаться dx (читается «дэ-икс»), от величины y — dy («дэ-игрек»).

Сразу стала ясна связь между кривой, описывающей путь тела, и скоростью этого тела в каждой точке этой кривой. А именно: скорость в любой точке определяется углом наклона касательной к кривой, проведенной через эту точку.

Почему так? Да очень просто. Если y — это путь, а x — время, то y, следовательно, есть некая математическая функция, зависящая от x. Этой функции соответствует некая кривая. В какой-то любой точке к ней проведена касательная. Угол ее наклона вычисляется элементарно просто — тангенс его равен $\frac{dy}{dx}$. Но поскольку игрек — путь, а икс — время, то эта величина и есть скорость. В самом деле, ведь если мы хотим определить скорость ядра, вылетающего из жерла орудия, то надо отметить где-нибудь отрезок пути (dy) и посмотреть, за какое время (dx) ядро его пролетит. При этом, разделив путь на

время $(\frac{dy}{dx})$, мы получим, естественно, среднее значение скорости за данный промежуток времени. Но если этот промежуток брать все меньше и меньше, мысленно стягивая его в точку, то как раз и получится точное значение скорости в данной точке.

Особой строгостью подобное рассуждение не отличается, но не больше строгости было и у самого Лейбница. Забегая вперед, следует сказать, что величина $\frac{dy}{dx}$ была впоследствии окрещена «производной» (в том смысле, что произведена от функции y, зависящей от x) и стала наряду с дифференциалом основным понятием нового анализа.

Уже в первых своих работах Лейбниц дал правила, как дифференцировать сумму и разность двух функций, их произведение и частное, показал, как получить дифференциал степени, ввел понятие о бесконечно малых и дифференциалах высших порядков и доказал множество других важнейших теорем дифференциального исчисления.

10

Попробуем, отталкиваясь от Лейбницева метода, вычислить или, как принято говорить в математике, «взять» какой-нибудь простенький дифференциал, чтобы обрести в этом деле хоть какой-нибудь собственный опыт. Итак, отыщем дифференциал для y, равного x^2. Соседней с x, бесконечно близкой к нему величиной, будет $x + dx$. Тогда бесконечно близкая к y величина $y + dy$ будет равна $(x + dx)^2$, то есть $x^2 + 2xdx + (dx)^2$. Если вычесть отсюда прежнее значение y, равное x^2, то получится, что бесконечно малое приращение величины y, то есть dy, равно $2xdx + (dx)^2$. Но $(dx)^2$ есть dx, умноженное на dx, то есть бесконечно малая второго порядка, в бесконечное

число раз меньшая бесконечно малой первого порядка dx, и по сравнению с dx ею, как утверждает Лейбниц, можно пренебречь и отбросить ее. Отсюда дифференциал dy в этом случае равен $2xdx$, что и соответствует всем учебникам и справочникам.

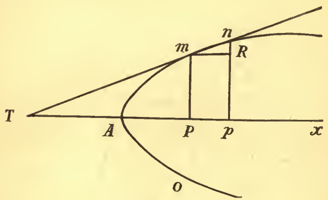
11

Теперь, когда нам не только не вчуже сама дифференциальная терминология, но по силам даже найти дифференциал от квадратичной функции x^2, описывающей, как известно, кривую, называемую параболой, приложение к письму, которое Энгельс получил однажды от Маркса, мы, как и его получатель, сможем понять без особых затруднений. Само письмо, к сожалению, так и не найдено до сих пор, и мы ничего не знаем о его содержании. Известно лишь, что написано оно где-то в конце 1865—начале 1866 годов, то есть в то самое необычайно трудное для Маркса время, когда он одновременно заканчивал работу над первым томом «Капитала» и готовил первый конгресс Интернационала и далеко уже, увы, не в первый раз испытывал одновременно тяготы бедности и разрушенного непосильным трудом здоровья. Но приложение — Маркс называет его «аппендиксом» — к этому письму написано так просто и ясно, что отнюдь не наводит на мысль о невзгодах, обрушившихся на его автора, и дает четкое представление о сути дифференциального исчисления. Именно эту цель и ставил перед собой Маркс, когда писал Энгельсу:

«Ты как-то просил меня во время моего последнего пребывания в Манчестере объяснить дифференциальное исчисление. На следующем примере ты сможешь полностью уяснить себе этот вопрос. Все дифференциальное исчисление возникло первоначально из задачи о проведении *касательных* к произвольной кривой через любую

ее точку. На этом же примере я и хочу пояснить тебе существо дела.

Пусть линия mAo — произвольная кривая, природы которой (является ли она параболой, эллипсом и т. д.) мы *не* знаем, и где в точке m требуется провести касательную.



Ax — ось. Мы опускаем перпендикуляр mP (ординату) на абсциссу Ax. Представь себе теперь, что точка n — бесконечно *ближайшая* точка кривой возле m. Если я опущу на ось перпендикуляр np, то p должна быть бесконечно ближайшей точкой к P, а np — бесконечно ближайшей параллельной линией к mP. Опусти теперь бесконечно малый перпендикуляр mR на np. Если ты теперь примешь абсциссу AP за x, а ординату mP за y, то $np = mP$ (или Rp), увеличенной на бесконечно малое приращение $[nR]$, или $[nR] = dy$ (дифференциал от y), а $mR = (Pp) = dx$. Так как часть mn касательной бесконечно мала, то она совпадает с соответствующей частью самой кривой. Я могу, следовательно, рассматривать

mnR как Δ (треугольник), Δ-ки же mnR и mTP подобные треугольники. Поэтому: $dy (=nR) : dx (= mR) = y (= mP) : PT$ (которое есть подкасательная для касательной Tn). Следовательно, подкасательная $PT = y\frac{dx}{dy}$. Это и есть *общее дифференциальное уравнение* для всех точек касания *всех* кривых. Если мне теперь нужно дальше оперировать с этим уравнением и с его помощью определить величину подкасательной PT (имея последнюю, мне остается только соединить точки T и m прямой линией, чтобы получить касательную), то я должен знать, каков *специфический характер* кривой. В соответствии с ее характером (как парабола, эллипс, циссоида и т. д.) она имеет *определенное общее уравнение* для ее ординаты и абсциссы каждой точки, которое известно из алгебраической геометрии. Если, например, кривая mAo есть парабола, то я знаю, что y^2 (y — ордината каждой произвольной точки) $= ax$, где a — параметр параболы, а x — абсцисса, соответствующая ординате y.

Если я подставлю это значение для y в уравнение $PT = y\frac{dx}{dy}$, то я должен, следовательно, искать сначала dy, то есть найти дифференциал от y (выражение, которое добавляется к y при его бесконечно малом возрастании). Если $y^2 = ax$, то я знаю из дифференциального исчисления, что $d(y^2) = d(ax)$ (я должен, разумеется, дифференцировать обе части уравнения) дает $2ydy = adx$ (d везде обозначает дифференциал). Следовательно, $dx = \frac{2ydy}{a}$. Если я подставлю это значение для dx в формулу $PT = \frac{ydx}{dy}$, то получу $PT = \frac{2y^2dy}{ady} = \frac{2y^2}{a} =$ (так как $y^2 = ax$) $= \frac{2ax}{a} = 2x$. Или: подкасательная для каждой точки m параболы равна двойной абсциссе той же самой точки. Дифференциальные величины исчезают в операции».

Такое письмо вместе с чертежом, который воспроизведен на 52-ой странице, получил от Маркса Энгельс, и ему, как и нам теперь, стали ведомы и суть дифференциального исчисления, и принятые в нем обозначения и то, как дифференцировать уравнение квадратичной функции, параболы, то есть что $d(x^2) = 2xdx$. И, быть может, именно благодаря этому письму, у нас есть теперь возможность рассмотреть наглядное, даже объемное — не только в переносном, но и в прямом смысле этого слова — объяснение, почему дифференциал еще одной, кубической функции, то есть $d(x^3)$ равняется $3x^2dx$. Это объяснение дал не кто иной, как Энгельс, в заметках и фрагментах к своей «Диалектике природы». Такова глубина следа, оставленного в его душе Марксовыми «математическими посланиями». Но, конечно, Энгельс совсем не собирался пересказывать основы дифференциального исчисления, которым учил его Маркс. Нет, он попытался даже такую абстрактную математическую процедуру, как вычисление дифференциала, поставить на службу главной идее своей книги: показать, что мир вне нас — все, что нас окружает, и мир внутри нас — наше мышление, тесно связаны, что они «подчинены одним и тем же законам и что поэтому они и не могут противоречить друг другу, в своих результатах, а должны согласоваться между собой».

«Из всех теоретических успехов знания вряд ли какой-нибудь считается столь высоким триумфом человеческого духа, как изобретение исчисления бесконечно малых во второй половине XVII века. Если уж где-нибудь мы имеем перед собой чистое и исключительное деяние человеческого духа, то именно здесь. Тайна, окружающая еще и в наше время те величины, которые применяются в исчислении бесконечно малых,— дифференциалы и бесконечно малые разных порядков,— является лучшим доказательством того, что все еще распространено представление, будто здесь мы имеем дело с чистыми «продуктами свободного творчества и воображения» челове-

ческого духа, которым ничто не соответствует в объективном мире. И тем не менее справедливо как раз обратное. Для всех этих воображаемых величин природа дает нам прообразы».

Что же за «прообразы» дифференцирования усмотрел в природе Энгельс?

Рассуждения его таковы. Все тела состоят из мельчайших частиц — молекул. По сравнению с любым телом молекула — это бесконечно малая величина. Но и любой предмет на Земле бесконечно мал по сравнению с нею самой, во всяком случае именно из этой предпосылки исходит механика: «Радиус Земли $= \infty$, таков принцип всей механики при рассмотрении закона падения». В свою очередь, для астронома Земля — бесконечно малая песчинка в мироздании. «Таким образом, мы уже имеем здесь перед собой бесконечные величины не только первого, но и второго порядка, и можем предоставить фантазии наших читателей,—если им это нравится,— построить себе в бесконечном пространстве еще и дальнейшие бесконечные величины более высоких порядков». «...И ничто не мешает каждому, кому это доставляет удовольствие, предположить, что в природе должны быть еще также и аналоги для d^3x, d^4x и т. д.»

Так окружающий мир, по Энгельсу, дарит нам бесценные намеки, и «человеческому духу» остается лишь улавливать их и строить свои теории, даже самые абстрактнейшие из них.

Но в чем, однако, состоит тот намек, благодаря которому мы сумеем продифференцировать функцию y, равную x^3?

Да очень просто — если молекулы можно уподобить дифференциалам, то природа, видимо, должна обходиться с ними в каком-то смысле так же, как математики с введенными ими же самими понятиями — бесконечно малыми величинами. И Энгельс утверждает, что так оно и есть!

«...Даже если мы допустим, что наибольшая молекула достигает диаметра в одну двадцатипятимиллионную долю миллиметра, то и в этом случае молекула все еще остается исчезающе малой величиной по сравнению с наименьшей массой, с какой только имеют дело механика, физика и даже химия. Несмотря на это, молекула обладает всеми характерными для соответствующей массы свойствами; она может представлять в физическом и химическом отношении эту массу и, действительно, представляет ее во всех химических уравнениях. Короче говоря, молекула обладает по отношению к соответствующей массе совершенно такими же свойствами, какими обладает математический дифференциал по отношению к своей переменной, с той лишь разницей, что то, что в случае дифференциала, в математической абстракции, представляется нам таинственным и непонятным, здесь становится само собой разумеющимся и, так сказать, очевидным.

Природа оперирует этими дифференциалами, молекулами, точно таким же образом и по точно таким же законам, как математика оперирует своими абстрактными дифференциалами. Так, например, дифференциал от x^3 будет $3x^2dx$, причем мы пренебрегаем $3xdx^2$ и dx^3. Если мы сделаем соответствующее геометрическое построение, то получим куб, длина стороны которого x увеличивается на бесконечно малую величину dx. Допустим, что этот куб состоит из какого-нибудь легко возгоняемого химического элемента, скажем, из серы; допустим, что поверхности трех из его граней, образующих один угол, защищены, а поверхности трех других граней свободны. Если мы поместим этот серный куб в атмосферу из паров серы и в достаточной степени понизим температуру этой атмосферы, то пары серы начнут осаждаться на трех свободных гранях нашего куба. Мы не выйдем за пределы обычных для физики и химии приемов, если, желая представить себе этот процесс в чистом виде, мы допустим, что на каждой из этих трех граней осаждается сперва

слой толщиной в одну молекулу. Длина стороны куба x увеличилась на диаметр одной молекулы, на dx. Объем же куба x^3 увеличился на разность между x^3 и $x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$, причем мы с тем же правом, как и математика, можем пренебречь dx^3, т. е. одной молекулой, и $3xdx^2$, т. е. тремя рядами, длиной в $x + dx$, линейно расположенных молекул. Результат одинаков: приращение массы куба равно $3x^2dx$».

Так просто, наглядно, даже изящно выводит Энгельс формулу для дифференциала функции, равной x^3. Конечно, тот же самый результат был бы получен, если бы еще раз пожелали воспользоваться методом Лейбница. Пример, приведенный Энгельсом,— всего лишь живописная иллюстрация к методу Лейбница, который позволяет находить дифференциалы не только для кубической функции, но и для множества других.

12

Ну а чем же обосновал Лейбниц новое исчисление? Какова была, как говорили в те времена, его метафизика? Вот что пишет один из самых ортодоксальных представителей школы Лейбница, маркиз Лопиталь, в первом печатном курсе анализа: «Обыкновенный анализ имеет дело только с конечными величинами, излагаемый же в этой книге проникает в самую бесконечность. Он сравнивает между собой бесконечно малые разности конечных величин, он находит отношения этих разностей и тем самым позволяет открыть отношения величин конечных, которые в сравнении с бесконечно малыми сами как бы являются бесконечными. Можно сказать даже, что этот анализ выходит за пределы бесконечного, ибо он не ограничивается бесконечно малыми разностями, а определяет отношения разностей этих разностей, отношения третьих, четвертых разностей и т. д., не останавливаясь при этом нигде. Таким образом, он обнимает не только бесконечность, но и бесконечность бесконечностей».

Лопиталь говорит здесь о бесконечно малых разностях, то есть, в понимании Лейбница, о дифференциалах, но среди всех этих громких и торжественных «объятий бесконечного» остается по-прежнему неясным, так что же такое бесконечность или даже бесконечность бесконечностей? Не останавливаясь на таких пустяках, Лопиталь продолжает: «Только такого рода анализ позволяет понять истинные принципы кривых, ибо кривые линии суть не что иное, как многоугольники с бесконечным количеством сторон... И, собственно говоря, вписанные и описанные вокруг кривых многоугольники, сливающиеся с кривыми при бесконечном увеличении числа их сторон, всегда принимались за самые кривые».

Энгельс писал: «Когда математика прямого и кривого оказывается, можно сказать, исчерпанной,— новое, почти безграничное поприще открывается такой математикой, *которая рассматривает кривое как прямое*... и *прямое как кривое*... О метафизика!».

Итак, первый постулат: кривая — это вовсе и не кривая, а некоторый многоугольник, стороны которого, хотя и бесконечно малые, но все же прямые... Отсюда уже недалеко и до второго, основного постулата, который, в категорическом изложении другого ученика Лейбница, Иоганна Бернулли, звучит так: «Величина, увеличенная или уменьшенная на бесконечно малую величину, не увеличивается и не уменьшается».

Как раз этот постулат и позволил нам в разобранном ранее примере считать, что $2xdx + dxdx$ это то же самое, что $2xdx$, поскольку $dxdx$ бесконечно мало по сравнению с dx.

Отсюда немедленно возникал вопрос: так что же, анализ бесконечно малых — это точная наука или просто способ приближенного вычисления? Нельзя же, в самом деле, полагать, что, прибавив даже очень малую величину к чему-то, мы ничего не прибавили, так может быть только, если эта малая величина равна нулю. Но ведь утвер-

ждается, вроде бы, что она не равна нулю, а всего лишь бесконечно мала...

Нуль она или не нуль?!

Чувствуя шаткость своей позиции, Лейбниц в письме, направленном одному из своих коллег, пытается убедить себя и других: «...То, что несравненно меньше, бесполезно принимать в расчет по сравнению с тем, что несравненно больше его: так частица магнитной жидкости, проходящая через стекло, несравнима с песчинкой, песчинка с земным шаром, а этот последний с небесной твердью...» Но ведь это рассуждение не математика, а землемера! И потому не удивительно, что строки, в которых один из виднейших современных историков математики, Адольф Павлович Юшкевич, в течение ряда лет бывший президентом Международной академии истории науки, резюмирует метафизику Лейбница, так похожи на текст обвинительного заключения:

«Воззрения и методы исследования школы Лейбница, как видно, не отличаются строгостью и четкостью. Основные принципы нового исчисления, собственно, здесь почти не разработаны, а те идеи, которые играют руководящую роль, логически небезупречны. Главное орудие анализа — бесконечно малые величины, из бесконечного числа которых складываются конечные величины, точно не определяются и принимаются не то за действительную величину, не то за абсолютный нуль и ничто или, лучше,— то за действительную величину, то за ничто. Это понятие, двойственное и мистически неясное, подвергается затем действиям, явно противоречащим логике, ибо прибавление бесконечно малой величины не изменяет конечного слагаемого, хотя эта бесконечно малая все же не нуль».

13

Но, может быть, Ньютону, который начал заниматься анализом лет на десять раньше Лейбница, удалось то,

с чем не справился его немецкий коллега? Подход его к проблемам анализа был во всяком случае иным — Ньютон всегда и всюду шел от механики и физики. «Геометрия,— писал он в своих «Математических началах натуральной философии»,— основывается на механической практике и есть не что иное, как та часть общей механики, в которой излагается и доказывается искусство точного измерения». На механических аналогиях построен и его метод флюксий — так он назвал новое исчисление, все задачи которого могут быть сведены к двум кардинальным задачам механики: определению скорости движения в данный момент времени по известному пути и определению пути, пройденного за данное время, по известной скорости. При этом «время» так же, как и «путь», было просто переменной величиной, для которой существует удобная аналогия в механике. Переменную величину Ньютон назвал «флюентой» (текущей), ее скорость — «флюксией» (то же, что Лейбницево $\frac{dy}{dx}$). Третьим важным понятием метода флюксий был «момент», соответствующий дифференциалу,— бесконечно малое, «едва-едва зарождающееся начало конечных величин». Эта бесконечно малая, без которой Ньютон тоже не сумел обойтись, доставила ему немало огорчений, ибо он глубже Лейбница чувствовал ее противоречивость. На протяжении всей своей жизни он мужественно сражался с ней, пытаясь изгнать ее из своего метода, и каждый раз, когда, казалось, уже одерживал победу, вынужден бывал отступить, плененный ее наглядностью и простотой совершаемых над нею операций.

В первые годы своей научной работы Ньютон оперирует с бесконечно малыми подобно всем своим современникам,— по известным правилам в одних случаях оставляя их, в других — отбрасывая. Но вскоре уже они кажутся ему «недостаточно строгими и математическими».

 Однако Ньютон не отрицает их практической пользы и,

подобно Архимеду, хочет оставить их «для себя», если не как способ доказательства, то как метод получения правильного результата. Это — леса, которые должны быть убраны после окончания постройки, но совершенно негодный материал для ее фундамента. Поэтому Ньютон старательно изгоняет бесконечно малые и пытается заменить их «методом первых и последних отношений». Иными словами, он намеревается избавиться от dx и dy, взятых отдельно, и пользоваться только их отношением $\frac{dy}{dx}$ [1]. В этом есть свой резон — ведь отношение есть величина конечная, что легко понять из той же механической аналогии: если бесконечно малый отрезок пути поделить на бесконечно малый промежуток времени, за который этот путь пройден, частное — скорость — будет вполне определенной конечной величиной.

В книге первой «Математических начал», в схолии — поучении — к одиннадцатой лемме первого раздела Ньютон пишет: «Я предпослал эти леммы с целью избежать утомительного проведения доказательств путем приведения к нелепости по методу древних геометров. Метод неделимых дает значительно более короткие доказательства. Но так как гипотеза неделимых несколько груба... и метод этот соответственно почитается менее геометрическим, то я предпочитаю свести доказательства последующих предложений к первым и последним суммам и отношениям зарождающихся и исчезающих величин, т. е. к пределам этих сумм и отношений, и таким образом, выводы этих пределов сделать по возможности краткими. Ибо таким путем получается то же самое, что и при помощи метода неделимых, и поскольку эти принципы бу-

[1] Это отношение стало называться «производной», точнее — «производной от y по x». Так появилось в анализе равенство $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. По-русски оно звучит: «эф-штрих от икса равняется

дут доказаны, то мы сможем пользоваться ими с большей безопасностью. Таким образом, если я в последующем буду рассматривать величины, как состоящие из частиц или же применять маленькие кривые линии как прямые, то не нужно полагать, что я подразумеваю при этом неделимые величины, а величины исчезающие и делимые; не суммы и отношения определенных частей, но всегда пределы сумм и отношений».

14

Как видим, Ньютон полон благих намерений: неделимые как метод доказательства изгоняются, отныне царствует метод пределов. Но оказавшись в не слишком привычном для его современников царстве пределов, Ньютон сразу же чувствует себя неуверенно и пытается прибегнуть к самозащите. Он предвидит возражения: а вдруг нет никакого «последнего отношения исчезающих величин»? Ибо если эти величины еще есть, то отношение их — не последнее, а если величин нет, то вроде бы нет и никакого отношения... И Ньютон снова аппелирует к скорости. «С таким же правом можно утверждать, что нет последней скорости у тела, прибывающего в какое-нибудь место..., последняя скорость — это скорость ни до, ни после момента достижения последнего места движения, а скорость в самый момент его достижения». «Точно так же под последним отношением исчезающих величин нужно понимать их отношение ни до и ни после их исчезновения, но отношение, с которым они исчезают. Подобным же образом первое отношение зарождающихся величин — это то, с которым они начинают существовать... И существует подобный же предел для всех величин и отношений, которые начинают и перестают существовать».

дэ-игрек по дэ-икс». Фраза эта — последняя дифференциальная премудрость, которую нам предстоит постичь. Она очень важна, как будет видно дальше.

Из всех этих рассуждений с их чуть ли не нарочитой запутанностью ясно одно: если раньше мы как будто бы понимали, что такое скорость в некоторый момент времени, то теперь это понимание от нас ускользает. А слова «отношение в момент исчезновения» снова приводят к вопросу — величины уже исчезли или еще нет? Нули они или не нули? И все начинается сначала...

Еще хуже дело обстоит там, где Ньютон впрямую переходит к практике дифференцирования. Тут ему все-таки приходится пользоваться бесконечно малыми, которые он называет «моментами» и определяет как «едва-едва зарождающиеся начала конечных величин». И тогда он уже не стесняется давать указания: а теперь уничтожьте члены, содержащие моменты, «как бесконечно малые»...

Как, например, предлагает Ньютон вычислять флюксию, то есть по-нынешнему производную, от произведения двух функций?

Рассуждения его таковы. Пусть вдоль некой оси движутся две точки. Их координаты — в терминологии Ньютона «флюенты»— описываются функциями u и v. Они зависят, конечно, от времени. А теперь нам нужна такая новая флюента y, которая равна произведению двух первых, то есть $y = uv$. Конечно, зная u и v, найти y не представляет труда. Но дело в том, что нас просят узнать, как связана скорость изменения новой функции со скоростями изменения двух старых. Иными словами, какова связь между их флюксиями или, на языке нынешней математики, их производными.

Если в данный миг «новая» флюента приняла значение y и при этом скорость ее изменения (вспомните угол наклона касательной к кривой!) равнялась y', то через бесконечно малый отрезок времени, который условно обозначим буквой m, флюента примет значение $y + y'm$.

«Пусть, например, дано уравнение $y = uv$. Подставь в него $u + u'm$, $v + v'm$ и $y + y'm$ вместо u, v и y, и ты получишь

$$y + y'm = (u + u'm)(v + v'm) = uv + u'vm + uv'm + u'v'mm.$$

Но по предположению $y = uv$. Поэтому вычеркни эти члены, а остальные раздели на m. При этом останется

$$y' = u'v + uv' + u'v'm.$$

Но так как мы предположили m бесконечно малой величиной для того, чтобы она могла выражать моменты величин, то те члены, которые на нее умножены, можно считать за ничто в сравнении с другими. Поэтому я ими пренебрегаю, и остается

$$y' = u'v + v'u».$$

В таком духе писал Исаак Ньютон, правда, обозначения у него были иными. Что же касается самой формулы для флюксии — производной произведения, то и сегодня ее учат студенты точно в таком же виде: «производная произведения равна производной первой функции, помноженной на вторую, плюс производная второй функции, помноженная на первую». И при этом студенты нимало не задумываются над тем, что Исаак Ньютон получил сию формулу, мягко говоря, не совсем корректным способом.

В общем, если оценка позиции Лейбница звучала у Адольфа Павловича Юшкевича как обвинительный акт, то в поведении Ньютона он находит смягчающие обстоятельства и уличает его главным образом в непоследовательности: «Сторонник бесконечно малых в первом периоде, он развивает во втором относительно строгую теорию пределов. Однако наряду с теорией пределов у него постоянно встречаются высказывания инфинитезимального толка (то есть в духе бесконечно малых.— *Л.К.*), в самом изложении теории пределов являются недоговоренности и логические неясности и, наконец, практическое пользование бесконечно малыми не сопровождается подлинным углублением доказательств при помощи перехода к пределу. Непосредственно последующие ученые не смогли установить ни этой эволюции Ньютона,

ни зависимости между теорией пределов и доказательствами с помощью бесконечно малых. Смешав то и другое, эти ученые внесли на некоторое время изрядную путаницу в философию математики».

Как кратко определяет ситуацию другой историк математики — Брэншвиг, Ньютону не удалось «ни заставить себя понять полностью, ни, может быть, полностью объясниться».

Фундамент анализа бесконечно малых выглядел настолько шатким, что должны были найтись желающие испытать его прочность.

15

Первая баталия разыгралась уже через несколько лет после появления статей Лейбница. В Парижской академии наук Мишель Ролль обрушил на бесконечно малые свой авторитет признанного знатока алгебры. В Италии Гвидо Гранди, со злорадством обнаружив у Лейбница парадоксальное равенство: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots = \frac{1}{2}$, немедленно заявил, что оно вполне согласуется с таинствами христианской религии и с идеей сотворения мира, когда «абсолютная бесконечная сила создала нечто из абсолютного ничего». Споры на континенте не утихли, когда в Англии объявился сильный и умный противник метода флюксий, понаторевший в философских дискуссиях с теологами и учеными Старого и Нового Света.

...Приятель епископа Беркли отказался на смертном одре от причастия. По всей вероятности, этот грустный факт остался бы никак не отмеченным в анналах математики, если бы умирающий не сообщил причины отказа. А она заключалась в том, что христианская вера, на его взгляд, не обладает доказательной силой науки и, в частности, математики. Можно понять чувства, которые при этом известии охватили новоиспеченного епископа Клойн-

3 949

ского. Надо полагать, что он считал себя лично уязвленным, тем более что с математикой у него были старые счеты — еще в юношеских дневниках младший учитель дублинского Тринити-колледжа Джордж Беркли отверг бесконечно малые и даже в «Трактате о началах человеческого знания» не пожалел нескольких параграфов, чтобы еще раз разделаться с ними.

Спор за одну человеческую душу, распропагандированную математиками, Беркли проиграл. Но он хотел защитить от пагубного влияния души остальных.

Сочинение Беркли называлось «Аналист, или Обращение к неверующему математику». Говорят, что у обращения был конкретный адресат — математик и астроном Эдмунд Галлей — тот самый Галлей, по настоянию которого Ньютон издал свои знаменитые «Начала», где с благодарностью говорит о Галлее как об «остроумнейшем и во всех областях науки ученейшем муже».

Беркли начинает с обращения: «Лично Вас я не знаю, но мне знакомо имя Ваше, которое завоевали Вы в отрасли науки, образующей предмет Вашего особого изучения, а также то влияние, которым Вы пользуетесь в делах, совершенно посторонних Вашей профессии, а также то предосудительное употребление, которое Вы и слишком многие Вам подобные даете этому не заслуженному Вами влиянию, чтобы невнимательных людей вводить в заблуждение в вопросах высочайшего значения, в коих Ваши математические познания ни в какой мере недостаточны, дабы придать Вам свойства истинного судьи».

Беркли обвиняет математиков, что они пользуются своим влиянием на друзей, чтобы настроить их скептически к догматам веры, которые строго недоказуемы. Против этого он берется показать, что основные положения нового исчисления бесконечно малых, используемого в математике ныне как ключ, с помощью которого открывают тайны геометрии и ее отражений в природе, еще менее доказуемы, чем догматы веры.

При этом он вовсе не желает быть неправильно понятым. Он отнюдь не предлагает отказываться от результатов, полученных приверженцами нового метода, или оспаривать их. Он хочет лишь испытать правомерность их рассуждений, их ясность или темноту — имеют ли они цену строгой науки или беспорядочных блужданий. Он жаждет показать, как заблуждение порождает истину, хотя и не порождает при этом науки. Нет, он не собирается вызывать инквизицию против математиков, он ставит своей целью лишь показать, как мало именно они имеют права требовать строгого доказательства того, во что люди верят.

Беркли пишет: «Я сказал (и я осмеливаюсь снова повторить это), что флюксия непонятна; что вторая, третья и четвертая флюксии еще более непонятны, что невозможно постичь простое бесконечно малое; что еще менее постижимо бесконечно малое от бесконечно малого, и так далее. Что можете Вы сказать в ответ на это? Попытались ли Вы выяснить понятие флюксии или разности? Ничего подобного».

А как выводит Ньютон флюксию для одной из функций? «При помощи фокуса». Ибо предположив сначала бесконечно малое существующим, он затем отбрасывает его как вовсе несуществующее. И Беркли продолжает: «Когда он (Ньютон.—*Л.К.*) говорит, пусть приращения исчезнут, то есть пусть они станут ничем, то есть пусть уже не будет приращений, то предыдущее допущение, что приращения были чем-то, что были приращения, отбрасывается, однако же последствия этого допущения, то есть полученное в силу него выражение, сохраняются. Это... ложный способ рассуждения...»

«Я был бы очень счастлив, если бы лицо со столь светлым умом было столь добрым, что объяснило бы, должны ли мы понимать под флюксиями сами зарождающиеся или исчезающие количества, или их движения, или их скорости, или просто их пропорции... чтобы вы удостои-

ли объяснения учение о второй, третьей и четвертой флюксиях и показали бы, если вы можете, что оно не противоречит здравому смыслу», — продолжает свое обращение к анонимному математику епископ Джордж Беркли.

Математика бесконечно малого действительно приводит к правильным результатам. Обстоятельство это представляется воистину странным, если иметь в виду все упреки, сделанные в ее адрес Беркли. Пытаясь объяснить это чудесное явление, он приходит к мысли, что все обусловлено наличием двух равных и противоположных ошибок в выводе, которые потом взаимно компенсируются. В общем — так считает Беркли — наука и человечество ничего бы не потеряли, если бы отпали теория флюксий и исчисление бесконечно малых...

Как только появился «Аналист», всколыхнулись защитники метода флюксий. Беркли был удостоен сразу двух ответов — от дублинского профессора Вальтона и от известного лондонского врача, секретаря Королевского общества Джеймса Джарина. Секретарь, впрочем, не решился проставить своего имени на собственном сочинении, опасаясь, по-видимому, неприятных осложнений с церковью, а назвал его скромно и достойно: «Геометрия — недруг непостоянства, в изложении Филалета Кентерберийского». Как следует уже из псевдонима (Филалет — «любящий постоянство»), автор был здесь более озабочен тем, чтобы отвести от математиков упрек в неверии, чем защитой флюксий. Вот образчик стиля Джарина. На вопрос, не пытается ли он, определяя «зарождающееся количество», дать жизнь несуществующей вещи, Джарин отвечает, что «флюксию нельзя считать ни несуществующей вещью, ни просто существующей. Это несуществование, переходящее в существование, или существование, возникающее из несуществования, начинающееся существование, нечто возникающее из ничего».

Беркли снова берется за перо. В ответе Джарину, не без юмора названном «В защиту свободомыслия в математике», он снова нападает на флюксию, но уже с новых и довольно любопытных философских позиций, известных еще, впрочем, со времен апорий Зенона, с задачами которого Беркли, как и все теологи, был несомненно знаком. Ньютон говорит о скорости в точке в данный момент времени. Но точка есть отсутствие пространства, а момент — отсутствие времени, а там, где нет пространства и времени, нет и движения. О какой же скорости идет речь? И Беркли требует для читателя, не имеющего математической подготовки, но обладающего здравым смыслом, права судить о том, может ли он мыслить себе «скорость без движения; движение, не пробегающее никакого пространства; величины, которые ни конечны, ни бесконечны; или вещь без величины, которая, однако, делима; фигуру без протяжения; отношение ничего к ничему; действительное произведение из ничего, умноженного на нечто».

Вальтон выступил в защиту скорости. Он попытался объяснить, что скорость тела, к которому приложена сила, неодинакова в любых двух точках пройденного пути и может сильно меняться даже при очень малом изменении места, но получил от Беркли издевательский ответ: «Как? Из того, что в двух точках не может иметь место одинаковая скорость, должно следовать, что в одной точке имеет место одна скорость? Не есть ли это заключение того сорта, как если бы мы сказали: один и тот же человек не может находиться в двух ореховых скорлупах, следовательно, он может находиться в одной скорлупе?»

...Епископу Беркли хотелось бы праздновать победу. Он готов был считать спор законченным. Но своим умным и по-настоящему талантливо написанным «Аналистом» он добился лишь одного — математики усиленно начали устранять недостатки и противоречия, которыми с таким блеском воспользовался их неожиданный оппонент.

А епископ Беркли махнул рукой на математику и занялся другими философскими вопросами, чтобы, заняв видное место среди самых отъявленных мракобесов, перейти на старости лет к страстной проповеди целебных свойств дегтярной воды.

Глава III.
«ЗАПОНКИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ»

Искусная уловка принимать незначительные отклонения от истины за самую истину (что является сутью дифференциального исчисления) лежит также в основе наших остроумных мыслей: ведь целое рухнуло бы, если бы мы подошли к этим отклонениям с философской строгостью.
Георг Лихтенберг

1

С сомнениями, которые терзали души математиков, Маркс вплотную познакомился позже, когда им были прочитаны и законспектированы сотни страниц учебников, когда он освоил капитальные труды основоположников дифференциального исчисления и их учеников. Изрядная доля иронии, с которой он отнесся к «враждебным воплям» противников нового анализа, не помешала ему оценить реальную пользу этих «воплей», необходимых «для прокладывания пути новому». Это тоже видишь, листая его математические рукописи, откуда и взяты закавыченные слова.

Первое знакомство с математическим анализом по курсу аббата Сори доставило ему огромное эстетическое удовлетворение. Его пленили простота и изящество Лейбницевых алгоритмов исчисления, и он с увлечением решает пример за примером, заполняя страницы рукописей вычислением дифференциалов. Его библиотека пополняется математическими трудами, и скоро Маркс уже считает своим долгом написать Энгельсу о новом своем увлечении и предложить ему вкусить от радостей позна-

ния. Вот строка из упоминавшегося уже письма, где Маркс впервые уведомил Энгельса, что перешел к изучению высшей математики: «В свободное время занимаюсь дифференциальным и интегральным исчислением. Кстати. У меня избыток книг по этим вопросам, и я готов одну из них переслать тебе, если ты хочешь этим делом заняться. Я считаю это почти необходимым для твоих военных занятий. Кроме того, этот раздел математики гораздо легче (поскольку речь идет о чисто технической стороне), нежели, например, высшие разделы алгебры. Никаких предварительных знаний, кроме обычных алгебраических и тригонометрических вещей, здесь не требуется, но необходимо общее знакомство с коническими сечениями».

Если бы и тогда обычай перлюстрировать корреспонденцию «нежелательных иностранцев» уже был в такой чести, как сейчас, то соответствующее ведомство Великобритании не раз имело бы случай обратиться за консультацией к математикам. Вероятно, ученые мужи заверили бы чиновников спецслужбы, что в переписке господ Маркса и Энгельса не делается попытки под видом обсуждения математических формул совершить посягательство на существующий строй. И почти так же вероятно, что они не смогли бы точно и квалифицированно ответить, что же именно интересует в математике этих беспокойных господ.

2

Конечно, понимание математики, ее методов, понимание математического «взгляда на вещи» не раз помогало Марксу и при разработке, казалось бы, чисто экономических проблем. Это естественно. Чернышевский, например, труды которого ценили Маркс и Энгельс, писал в своих замечаниях на трактат английского экономиста

Д. С. Милля «Основы политической экономии»: «Мы видим уже много примеров тому, какими приемами пользуется политическая экономия при решении своих задач. Эти приемы математические. Иначе и быть не может, потому что предмет науки — количества, подлежащие счету и мере, понимаемые только через измерение и вычисление».

Любопытное признание того, что занятия высшей математикой наложили свой отпечаток на стиль Марксовых исследований, содержится в переписке Маркса и Энгельса по поводу критической статьи Дюринга о первом томе «Капитала» (того самого Евгения Дюринга, приват-доцента Берлинского университета, которого Энгельс, похоронив как ученого, одновременно «обессмертил», выступив против него со своей знаменитой полемической книгой).

В январе 1868 года Энгельс пишет Марксу:

«Дорогой Мавр!

Возвращаю *Дюринга*... Вся статья—сплошное смятение и страх. ...В каждой строке сквозит страх, как бы его не разделали...»

Маркс отвечает Энгельсу: «Кое-чего Дюринг явно не понял». И в тот же день отправляет еще одно письмо, в котором разъясняет:

«...Этот парень не уловил... принципиально новых положений в книге ... Что впервые заработная плата представлена как иррациональная форма проявления скрывающегося за нею отношения, и это ясно показано на примере обеих форм заработной платы: повременной и сдельной. (Мне помогло то, что в высшей математике часто встречаются такие формулы.)».

Но математика служила Марксу не только инструментом понимания глубинных, скрытых от поверхностного взгляда явлений экономики, но и средством для сжатого, ясного и точного изложения полученных результатов. Именно в математической форме представил он в «Капи-

тале» разработанные им схемы воспроизводства: в виде алгебраического уравнения для простого воспроизводства и в виде неравенства — для расширенного.

Маркс не успел завершить комментарии к схеме расширенного воспроизводства. Он посвятил этому лишь небольшую тетрадь. Впоследствии, уже после его смерти, издавая второй том «Капитала», Энгельс включил эту рукопись в книгу как главу «Накопление и расширенное воспроизводство».

А в предисловии к третьему тому «Капитала» Энгельс писал:

«Для главы III имелся целый ряд неоконченных математических вычислений, а также целая, почти законченная тетрадь, относящаяся к семидесятым годам и представляющая в уравнениях отношение нормы прибавочной стоимости к норме прибыли. (Энгельс имел в виду написанную Марксом в 1875 году работу «Норма прибавочной стоимости и норма прибыли. Математическая обработка».—*Л. К.*) Мой друг Самюэл Мур, выполнивший также бо́льшую часть английского перевода первой книги, взялся обработать для меня эту тетрадь, к чему он в качестве старого кембриджского математика был несравненно более способен. Из его резюме я составил затем главу III, пользуясь для этого кое-где и основной рукописью».

Именно Мура первого посвятил Маркс в свои планы, которые он долго и любовно вынашивал — вывести в математической формуле «главные законы» экономического движения. В конце мая 1873 года он, больной, приехал в Манчестер показаться доктору Гумперту. Гумперт был в отъезде (возвратившись, он предписал Марксу ограничить свое рабочее время самое большое четырьмя часами в день), и Маркс часто встречался и подолгу беседовал с Муром. В эти дни он пишет Энгельсу, который к тому времени уже перебрался из Манчестера в Лондон:

«Я рассказал здесь Муру одну историю, с которой privatim [1] долго провозился. Но он думает, что вопрос неразрешим или, по крайней мере, pro tempore[2], неразрешим ввиду многих и большей частью еще лишь подлежащих обнаружению факторов, относящихся к этому вопросу. Дело в следующем: ты знаешь таблицы, в которых цены, учетный процент и т. д. и т. д. представлены в их движении в течение года и т. д., в виде восходящих и нисходящих зигзагообразных линий. Я неоднократно пытался — для анализа кризисов — вычислить эти up and downs[3] как неправильные кривые и думал (да и теперь еще думаю, что с достаточно проверенным материалом это возможно) математически вывести из этого главные законы кризисов. Мур, как я уже сказал, считает задачу пока невыполнимой, и я решил до поры до времени отказаться он нее».

Пожалуй, нельзя сказать, что, расхолаживая Маркса, Мур был совсем уж неправ. Задача, к которой подбирался Маркс, была бесконечно трудна. Настолько трудна, что и нынешняя математическая экономика все еще топчется на ее подступах.

Впрочем, и некоторые современные Марксу ученые пытались вводить те или иные достижения высшей математики в политэкономию, и эти работы, естественно, не могли остаться вне его поля зрения. Его «научный друг» Максим Максимович Ковалевский вспоминал о временах своего знакомства с Марксом: «Он возобновил также занятия математикой, дифференциальными и интегральными вычислениями для того, чтобы сознательно отнестись к только что возникавшему тогда математическому направлению в политической экономии, во главе которого мы находим ныне таких ученых, как Эджворс и каким во времена Маркса являлся уже Джевонс».

[1] privatim — между нами говоря (лат.).
[2] pro tempore — временно (лат.).
[3] up and downs — повышения и понижения (англ.).

Видимо, Ковалевский (он мало разбирался в математике, да и с Марксом был знаком довольно непродолжительное время) тут ошибается. Едва ли Маркс столь пристально изучал математический анализ с единственной лишь целью разобраться в том или ином направлении в политэкономии. Но одно ясно: экономические исследования настоятельно требовали от него углубленных знаний математики, а эти знания обещали, в свою очередь, новые, неожиданные возможности экономического анализа.

3

Но что же все-таки интересовало Маркса в самой математике?

Пожалуй, он и сам затруднился бы в первые годы ответить на такой вопрос. Во всяком случае в его заметках нет никаких специальных указаний на то, как и почему математика из вспомогательного средства в экономических исследованиях превратилась для него в предмет самостоятельного изучения. Рукописи распадаются на две неравные части, и там и там Маркс обращается к самым разным разделам математики, но если вначале изучение элементарной математики было необходимо ему для решения экономических задач, то в последние годы обращение к алгебре и геометрии связано всегда с желанием глубже разобраться в проблемах анализа.

Сейчас, в век математизации всех наук, широко известны слова из воспоминаний Поля Лафарга о том, что Маркс «считал также, что наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой». Менее известна фраза, непосредственно предшествующая этим словам: «В высшей математике он находил диалектическое движение в его наиболее логичной и в то же время простейшей форме». Лафарг нашел очень точные слова, говоря о математических увлечениях Маркса. Анализ бесконечно малых, хоть и созданный метафи-

виками, был по сути пересыщен диалектикой. Переходы от конечного к бесконечному. Попытка описать движение, дать его математическую картину — противоречивая в своей основе, ибо всякая картина, по необходимости, есть нечто неподвижное, и вовсе неясно, как с помощью таких «недвижимостей», как точка в пространстве и момент во времени, можно отобразить движение. Сам метод анализа, требовавший сначала полагать, что приращения величин существуют, а затем устремлять их к нулю. Наконец, история возникновения анализа, который появился, казалось бы, неожиданно, «как бог из машины», и в то же время (Марксу это было очевидно!) не мог не уходить корнями в предшествующие разделы высшей алгебры...

«Элементарная математика, математика постоянных величин, движется, по крайней мере в общем и целом, в пределах формальной логики; математика переменных величин, самый значительный отдел которой составляет исчисление бесконечно малых, есть по существу не что иное, как применение диалектики к математическим отношениям», — писал Энгельс в «Анти-Дюринге» и продолжал свою мысль в заметках к «Диалектике природы»: «...Диалектическое отношение уже в дифференциальном исчислении, где dx бесконечно мало, но тем не менее действенно и производит все».

Для Маркса было чистым наслаждением разбираться во всем этом.

4

Есть и еще одно, вполне правдоподобное, предположение о том, почему сердце Маркса потянулось к математике: быть может, Маркс, вспоминая свои юношеские увлечения Гегелем, захотел в зрелом возрасте еще раз вступить с ним в логическую дуэль и выбрал классическое оружие — математику.

Гегель был знатоком математики, о чем Маркс и Энгельс считали своим долгом напоминать всякому, кто, по незнанию или забывчивости, утверждал обратное.

Весной 1865 года, через три с лишним десятилетия после смерти Гегеля, Энгельс в письме сурово отчитал философа Фридриха Ланге: «Я не могу не упомянуть о Вашем замечании по поводу старика Гегеля, которому Вы отказываете в глубоком математическом и естественнонаучном образовании. Гегель знал математику настолько, что никто из его учеников не был в состоянии издать оставшиеся после него многочисленные математические рукописи. Единственный человек, знающий, насколько мне известно, достаточно и математику и философию для того, чтобы это сделать,— это Маркс».

И Энгельс заключает письмо словами: «Я, конечно, теперь больше уже не гегельянец, но чувствую все еще большое почтение и привязанность к великому старику». Маркс тоже многому научился у «великого старика». Даже в Марксовой нелюбви к арифметике видится нечто гегелевское — тот недаром ведь говорил, что в арифметике мышление «движется в сфере безмыслия».

Гегель не только хорошо знал математику — он считал ее необходимым слагаемым в сумме знаний, потребных философу. Когда молодой ротмистр русской гвардии Борис Икскюль, из прибалтийских помещиков, решил заняться своим образованием и направился прямо в Гейдельберг к Гегелю, тот прежде всего посоветовал ему начать с алгебры, естествознания, географии и латинского языка. И лишь через полгода, лично проэкзаменовав прилежного ученика, Гегель дал ему наставления по изучению философии.

Гегель владел математикой настолько свободно, что будучи еще ректором Нюрнбергской гимназии, где преподавал философию и религию, в случае необходимости заменял учителей высшей математики. Но нет нужды ссылаться на гимназические уроки; в «Науке логики»,

его важнейшем сочинении, главной книге его жизни, десятки страниц посвящены количеству, числу, мере, а главное, бесконечности,— математике в целом и дифференциальному исчислению в частности. И предшествовало написанию этих глав тщательное изучение трудов древних и новых математиков и глубокое постижение алгебры.

Он не только дал новое определение математики, свободное от торгашеского преклонения перед количеством и довольно точно устанавливающее границы математики, ее роль и место в системе наук. Он увидел и истинное место дифференциального исчисления в боевых порядках математики, утверждая, что область анализа — это качественно новая область, и потому любая попытка свести анализ к элементарной математике, ликвидировать качественный скачок между ними обречена с порога на неудачу. В примечании «Цель дифференциального исчисления, выведенная из его приложения», Гегель пишет: «...По методу дифференциального исчисления сразу видно, что он изобретен и установлен не как нечто самодовлеющее». Не элементарная математика по собственному почину произвела из себя на свет математический анализ — ее побудили к этому потребности естествознания и техники. И далее, уже прямо метя в то «шарлатанство» и «фокусничество», в те, как он выражался, «кунштюки», которыми создатели анализа пытались оправдать свои «противозаконные» действия, утверждает: «Видимость случайности, являемая дифференциальным исчислением в его приложениях, значительно уменьшилась бы, если бы отдавали себе отчет в характере тех областей, в которых приложение может иметь место, и в своеобразных потребностях и условиях этого приложения». Эта мысль прямо продолжена у Энгельса в его «Диалектике природы», где он говорит об аналогии дифференциального исчисления с известными процессами природы: «...как только математики укроются в свою неприступную твердыню абстракции, так называемую чистую математику, все

эти аналогии забываются; бесконечное становится чем-то совершенно таинственным, и тот способ, каким с ним оперируют в анализе, начинает казаться чем-то совершенно непонятным, противоречащим всякому опыту и всякому смыслу».

И при всем том Гегель умудрился рассматривать развитие математики всего лишь как отсвет саморазвития логических категорий, искаженный, испорченный вмешательством этих самых «приложений» и «применений». И даже Лагранжа — самого близкого ему математика — хвалит не за попытку вскрыть реальные отношения между математикой конечного — алгеброй и математикой бесконечного — анализом, а за то, что Лагранж вводит в анализ понятие производной якобы «из головы», извне, произвольным и необязательным способом.

Гегель открыто утверждал, что никакой диалектики в математике нет и быть не может: внутри нее нет связи, нет переходов, один из ее разделов никак не связан с другим. Диалектическая математика для Гегеля — квадратный круг, полная бессмыслица. И он с удовлетворением суммировал бесчисленные попытки обосновать анализ на почве самой математики, каждая из которых кончалась крахом. Он считал, что иначе и быть не могло, и лишь поражался упрямству математиков.

Мог ли Маркс не принять вызов? Особенно теперь, когда он окончательно избавился от юношеских восторгов перед стройностью гегелевской философской мысли, а в самой математике разобрался, пожалуй, глубже, чем кумир его юности...

Впрочем, полемический запал не обязательно сразу же был заложен между строк математических рукописей Маркса. Ведь не исключено, что сами занятия высшей математикой диктовались желанием еще глубже понять Гегеля. С тех давних пор в памяти Маркса должно было сохраниться ощущение, которое испытывал, читая Гегеля, почти всякий настоящий философ. Недаром ведь

Ленин в «Философских тетрадях» писал, что некоторые утверждения Гегеля непонятны без знания высшей математики. Вполне могло случиться и так: раз и навсегда покончив, казалось бы, с критикой Гегеля, Маркс много лет спустя вновь вернулся к этому вопросу,—ему показалось, что остались какие-то невыясненные частности. А то, что для этого выяснения надо разобраться в сложнейших вопросах высшей математики, Маркса, конечно, остановить не могло...

В «Науке логики» Гегель попытался решить проклятый вопрос бесконечно малых: нуль они или не нуль? «В уравнении... x и y, как таковые, должны... обозначать собой некоторые величины; это значение совершенно утрачивается в так называемых бесконечно малых приращениях. dx, dy суть уже вовсе не величины и не должны обозначать собою величины; они имеют значение только в своем отношении, они имеют смысл только как моменты. Они уже не суть нечто, нечто, взятое как величина, они не суть конечные приращения; однако они не суть также ничто, это не лишенные определения нули. Вне своего отношения они чистые нули и должны быть приняты лишь как моменты отношения, как определения дифференциального коэффициента $\frac{dy}{dx}$».

Гегель вознамерился здесь объяснить, истолковать уже сделанное до него математиками — и тем ограничился. Маркс, начавший свое исследование от той же отправной точки, не только в значительной мере «объяснил казус», но и выдвинул продуктивную философскую — и математическую! — идею о дифференциале как оперативном символе, которая, будучи повторно высказана несколько десятилетий спустя другим ученым, послужила базой для нового и оригинального построения курса анализа.

Не правда ли, какая неожиданная иллюстрация знаменитой мысли о том, что если раньше философы лишь объясняли мир, то теперь задача их — изменить его!

5

...Узкая, необычная для Марксовых рукописей полоска бумаги, но на ней — его характерный почерк. Это — приложение (Маркс назвал его «аппендиксом») к одному из писем Энгельсу, дата которого, как уже было сказано, известна лишь ориентировочно.

«Ты как-то просил меня во время моего последнего пребывания в Манчестере объяснить дифференциальное исчисление. На следующем примере ты сможешь полностью уяснить себе этот вопрос. Все дифференциальное исчисление возникло первоначально из задачи о проведении *касательных* к произвольной кривой через любую ее точку. На этом же примере я и хочу пояснить тебе существо дела».

Следующие за этим строки (полностью они приведены в «Интермеццо», предшествующем этой главе) составляют самую раннюю по времени часть рукописей Маркса по высшей математике. А самая поздняя написана в последние годы его жизни, точнее, не «написана», а «писалась», потому что смерть не дала ему выполнить замысел: закончить большую, последнюю свою работу — обосновать дифференциальное исчисление, раскрыть его природу и диалектику. И, словно предчувствуя скорую кончину, он решает выбрать из своих черновиков самое главное, переписать начисто и отослать Энгельсу. Таких работ должно было получиться три, но Энгельс ознакомился только с двумя, третью, последнюю, Маркс так и не успел дописать.

Маркс, которому давно уже было за шестьдесят, больной и усталый, надломленный смертельным недугом жены, писал эти страницы с дерзким задором юности, он писал их сочным языком человека, знающего цену острому слову и острой мысли. И Энгельс ответил ему мальчишески восторженно: «Вчера, наконец, я набрался храбрости

 проштудировать без пособий твои математические руко-

писи и был рад убедиться, что не нуждаюсь в книгах. Прими по этому поводу мои комплименты. Вещь ясна, как солнце, так что, право, диву даешься, почему математики так упорно настаивают на том, чтобы окутывать ее тайной». И заканчивает письмо в том же ключе: «Эта штука так меня захватила, что я не только весь день думал о ней, но и во сне: в прошлую ночь мне приснилось, что я дал одному парню свои запонки для дифференцирования, а он с ними удрал».

Между этими манускриптами, написанными специально для Энгельса — между «аппендиксом» и двумя последними работами,— лежат пятнадцать лет жизни и немалое число страниц, составляющих самую интересную часть Марксова математического наследства.

6

«Я работаю теперь, как лошадь. ...В перерывах между работой — нельзя же все время писать — занимаюсь дифференциальным исчислением $\frac{dx}{dy}$. У меня не хватает терпения читать что-нибудь еще. Всякое другое чтение гонит меня обратно к письменному столу».

Урывками, похищая минуты у часов, отданных «Капиталу», старался Маркс уже в те весенние дни 1865 года понять, отчего так странно получается с дифференциальным методом: строго говоря, он весь — сплошное нарушение математики, а результаты неизменно получаются правильными. «...Мы дошли до того,— писал Энгельс в «Анти-Дюринге»,— что большинство людей дифференцирует и интегрирует не потому, что они понимают, что они делают, а просто потому, что верят в это, так как до сих пор результат всегда получался правильный». Но не мог же Маркс, в самом деле, примириться с советом отчаявшегося Даламбера: «Идите вперед, а вера придет!».

Галльское легкомыслие этой фразы было не по душе Марксу. «Идите вперед» — значит, пользуйтесь всеми известными правилами дифференцирования и не ломайте голову над тем, откуда они появились. Постепенно еретические идеи сами выйдут из вашей головы — каждый новый удачный вояж под «дифференциальным парусом» приучит к мысли, что с ним не страшны никакие математические штормы. «Вера придет».

Вера! Этого еще не хватало математике!

«Те глупости и нелепости, которыми математики не столько объясняли, сколько извиняли этот свой метод, приводящий странным образом всегда к правильным результатам, превосходят самое худшее... фантазерство натурфилософии (например, гегелевской), по адресу которого математики и естествоиспытатели не могут найти достаточных слов для выражения своего ужаса. Они сами делают — притом в гораздо большем масштабе — то, в чем они упрекают Гегеля...».

Подбор резких слов и нелестное сравнение не случайны: Энгельс чутко уловил настроение своего друга. Хотя слова эти он написал много позже, но, надо думать, ему вспоминался и «аппендикс», и «математические» письма Маркса, и он вновь сопереживал с ним прекрасную злость человека, которому мало двадцати четырех часов в сутках.

И все-таки наступил момент, когда Маркс смог позволить себе взяться за задачу, к которой давно тянулись его руки. Правда, все получилось не совсем так, как хотелось бы — не то, чтобы по-настоящему высвободилось время, а просто он был очень нездоров. «После 1870 г. снова наступила пауза, обусловленная главным образом болезненным состоянием Маркса. По обыкновению, он заполнял это время изучением; агрономия, американские и в особенности русские поземельные отношения, денежный рынок и банки, наконец, естественные науки:

 геология и физиология, и в особенности самостоятельные

математические работы составляют содержание многочисленных тетрадей Маркса с выписками, относящихся к этому времени». Слова эти из предисловия Энгельса ко второму тому «Капитала», конечно, общеизвестны. Но далеко не все знают, как храбро сражался в те годы больной Маркс с задачей, которую и по сию пору нельзя считать полностью решенной, несмотря на то, что попыткам обосновать дифференциальное исчисление посвящены сотни книг, составляющие самостоятельную отрасль математической литературы.

7

Итак, надо еще раз применить испытанное оружие диалектики. Для Маркса это значило в первую очередь рассмотреть вопрос исторически — откуда что взялось и где в старом зародились ростки нового. Ничто в природе не возникает на пустом месте. Никакой пропасти между обычной — низшей—и основанной на анализе бесконечно малых — высшей—математикой существовать не должно, наоборот, обязательно есть переход, но математики, даже самые великие среди них, его не заметили: ведь если они и были философами, то все без исключения матафизиками. Именно потому их так пугало, что иные положения высшей математики казались совершеннейшим абсурдом с точки зрения низшей — как выглядели, например, почти все операции с исчезающе малыми величинами, которые то надо, а то не надо принимать в расчет.

Энгельс, который как раз в эти годы работал над своей «Диалектикой природы» и, постоянно общаясь с Марксом, был в курсе всех его проблем и интересов, писал в своей книге о том, как развитие наук заставило ученых девятнадцатого века стихийно, помимо их воли, «перековываться» из метафизиков в диалектиков: «...Известное замешательство вызвала уже высшая математика, кото-

рая рассматривает вечную истину низшей математики как преодоленную точку зрения, часто утверждает нечто противоположное ей и выставляет положения, кажущиеся представителю низшей математики просто бессмыслицей».

По одним только этим словам видно, как проникся Энгельс идеями Маркса. Но Энгельс продолжает:

«Нет ничего комичнее, чем жалкие уловки, увертки и вынужденные приемы, к которым прибегают математики, чтобы разрешить это противоречие, примирить между собой высшую и низшую математику, уяснить себе, что то, что у них получилось в виде неоспоримого результата, не представляет собой чистой бессмыслицы,— и вообще рационально объяснить исходный пункт, метод и результаты математики бесконечного».

«Методом и результатами математики бесконечного» Маркс собирался поглубже заняться позже, но уже с самого начала он был безусловно убежден, что «исходный пункт» ее следует искать в недрах «низшей» математики, что корни анализа бесконечно малых величин исходят из той математической почвы, где оперируют с самыми обычными, вполне конечными количествами.

Но одно дело быть уверенным, что поиски должны дать результат (это само по себе половина успеха), а другое — знать, где искать. Маркс опять прибегает к обычному для него методу — он самым тщательным образом изучает всю предысторию вопроса. Скоро он уже четко видит, где пролегает условная граница между двумя «сортами» математики. Бином Ньютона — последний пограничный столб элементарной алгебры. Теорема Тейлора (и ее частный случай теорема Маклорена) — аванпосты высшей математики. Бином — царство конечного. Теоремы — это уже ряды, число членов которых не имеет счета...

Поначалу у Маркса появляется соблазнительная
 мысль—все крайне просто: «II. Теорема Тейлора основана

на переводе биномиальной теоремы с алгебраического языка на дифференциальный способ выражения». Странная пунктуация цитаты объясняется тем, что она — заглавие одного из разделов рукописей, а смысл ее очевиден из фразы, написанной на полях: «Фактически все заимствовано из алгебры, даже *последовательное дифференцирование...*»

Марксу, вероятно казалось, что он приближается к разгадке тайны дифференциального исчисления. В словах, которые он употребляет по отношению к биному Ньютона, звучат нотки восторга: «Открытие Ньютоном биномиальной теоремы... произвело революционный переворот во всей алгебре... [Она] является также главной основой дифференциального исчисления». Но ведь и бином, и дифференциальное исчисление — и то и другое—создания ньютоновского гения. И в душу Маркса закрадывается подозрение: а что, если Ньютон уже знал и теорему Тейлора, и теорему Маклорена? Что, если он вывел их сам для себя, получил «*втихомолку* свои результаты прямо из применения биномиальной теоремы»?

Мысль эта долго не дает покоя Марксу, она перекочевывает из тетради в тетрадь. Он подозревает другого гения в том, что и тот также был способен извести кипы бумаги, чтобы потом сказать людям всего несколько отточенных предложений... «Не обстояло ли дело так, что Ньютон, поведав миру только свои результаты, как это он делает, например, в самых трудных случаях в «*Arithmetica Universalis*», втихомолку вывел для своего личного потребления из открытой им биномиальной теоремы и Тейлорову, и Маклоренову теорему?» — еще раз спрашивает себя Маркс. И решает, что надо, наконец, покончить с сомнениями.

«На это можно с полной уверенностью сказать: нет,— следуют решительные строки в математических рукописях. — Он не был из тех, которые предоставляют своим ученикам возможность присвоить себе такое открытие.

В действительности он был еще слишком поглощен разработкой самих дифференциальных операций, которые у Тейлора и Маклорена предполагаются уже имеющимися и известными. К тому же, как свидетельствуют его первые элементарные формулы исчисления, Ньютон явно пришел к ним первоначально, отправляясь от механических, а не принадлежащих чистому анализу исходных пунктов.

С другой стороны, что касается Тейлора и Маклорена (Маркс и их тоже неоднократно пытался заподозрить в том, что они все знали, но молчали.— *Л. К.*), то они с самого начала в своей работе оперируют на почве самого дифференциального исчисления, и ничто их не побуждало поэтому доискиваться наивозможно более простых алгебраических исходных пунктов этого исчисления, тем более что спор между последователями Ньютона и Лейбница вращался вокруг определенных, уже готовых форм исчисления, как только что открытой, совершенно особой математической дисциплины, до которой обычной алгебре, как до звезды небесной, далеко».

Так выясняет для себя Маркс психологическую сторону вопроса. Он не только убеждается, что до него никто не искал «алгебраических прообразов дифференцирования», но и понимает, почему так получилось: «Я не думаю, чтобы какой-нибудь математик... доказал или хотя бы заметил необходимость этого перехода от первого, алгебраического метода... Для этого они были слишком поглощены материалом исчисления».

Еще несколько предложений, и Маркс считает вопрос исчерпанным: «Подлинные и в силу этого простейшие взаимосвязи нового со старым открываются всегда лишь после того, как это новое само приобретет уже завершенную форму, и можно сказать, что в дифференциальном исчислении это возвращение (отнесение) назад было осуществлено теоремами Тейлора и Маклорена. Поэтому только Лагранжу пришла в голову мысль свести дифференциальное исчисление к строго алгебраической основе».

И Маркс берется за Лагранжа всерьез. В сущности, на него одного у Маркса надежда: ведь Маклорен с Тейлором подвели его. Их теоремы (которые Маркс называл «колоссальными обобщениями»), хотя и родственны биному Ньютона, но все-таки развивались на почве дифференциального исчисления, и Маркс никак не мог считать, что они и есть желанная отгадка — те алгебраические корни высшей математики, которые он искал.

Лагранж поначалу увлек Маркса прозрачной логикой мысли, да и сама идея подвести, пусть задним числом, алгебраический фундамент под уже готовое здание дифференциального исчисления была близка Марксову сердцу. «В отличие от других архитекторов, наука не только рисует воздушные замки, но и возводит отдельные жилые этажи здания, прежде чем заложить его фундамент». Нет, эта фраза взята не из математических рукописей — мы помним ее по известнейшей Марксовой работе, никакого отношения не имеющей к математике. Но метод — подход к предмету — у Маркса был всегда один и тот же, шла речь о политической экономии или же о естественной дисциплине. («...Принимать *одну* основу для жизни, другую для *науки* — это значит с самого начала допускать ложь»,— писал он еще в молодые годы.)

...Немало добрых слов посвящено Лагранжу в Марксовых рукописях. Но чем больше ценил Маркс Лагранжа, чем больше симпатизировал его начинанию, тем горше ему было разочаровываться в Лагранже. «Теория аналитических функций, содержащая принципы дифференциального исчисления, освобожденные от всякого рассмотрения бесконечно малых или исчезающих пределов и флюксий, сведенные к алгебраическому анализу бесконечных количеств» — так по-боевому назвал Лагранж свою книгу. Но, увы, Лагранж со своим делом не спра-

вился — ему все-таки пришлось, хоть и в неявной форме, апеллировать к бесконечно малым, и Маркс с огорчением вынужден был это заметить: «...Лагранж действительно освобождается от всего, что представляется ему метафизической трансцендентностью во флюксиях Ньютона, в бесконечно малых разного порядка Лейбница, в теории пределов исчезающих величин, в подстановке символа $\frac{0}{0}\left(=\frac{dy}{dx}\right)$ вместо дифференциальных коэффициентов и др. Это, однако, не мешает ему самому, в применении его теории к кривым и т. д., постоянно пользоваться тем или иным из этих «метафизических» представлений». Мало того, и в главном, отправном пункте своей работы — в попытке вывести теорему Тейлора не из дифференциального исчисления, а из чистой алгебры — Лагранж допускает жестокую натяжку. Маркс уличает его и с горечью пишет: этот вывод «представляется покоящимся на обмане». Таков суровый, но совершенно справедливый приговор, который Маркс вынес Лагранжу. И Маркс вынужден снова возвратиться к исходной точке: «В учебниках теперь даже вошло в моду показывать, что как из теоремы Тейлора и Маклорена можно вывести теорему о биноме, так и обратно. Однако нигде, даже у Лагранжа... эта связь между теоремой о биноме и двумя другими не раскрыта во всей ее девственной простоте, и здесь, как и всюду, важно сорвать с науки покров тайны».

С присущей ему тщательностью Маркс проштудировал не только сочинения самого Лагранжа, но и всех тех, кто пытался связать «алгебраический» метод Лагранжа, построенный на понятии «производной», с дифференциальным исчислением Лейбница, имеющим дело с символами для дифференциала. И здесь — теперь уже под его обстрел — попали труды математика Франкера, «элегантного француза», учебник которого был когда-то сурово раскритикован Энгельсом за скверное изложение арифме-

тики. Маркс, обращаясь к Энгельсу, пишет: «Один французский математик первой трети 19-го века — Бушарла, который, как и известный [тебе] «элегантный» француз, но совсем по-иному ясно связал дифференциальный метод с алгебраическим методом Лагранжа, говорит...» — Маркс пересказывает смысл очередного «казуса», с помощью которого Бушарла пытается оправдать самостоятельное существование дифференциала. Иронический оттенок относительно «ясности» проделанных манипуляций очевиден: Бушарла вводит заведомо ложную формулу, и Маркс действительно ясно показывает ее ложность. Что же касается Франкера, то он попросту утверждает, что дифференциал «является синонимом для производной и отличается от нее только обозначением».

И Маркс заключает свое исследование эпигонов Лагранжа:

«Итак, для того, чтобы «облегчить алгебраические операции», вводят заведомо ложную формулу, окрещивая ее именем «дифференциал».

9

Обманутый Лагранжем, Маркс отступает. Отступает, чтобы снова идти вперед, снова вчитываться в страницы математических трактатов.

Так появляется на свет очерк «Об истории дифференциального исчисления». Маркс раскладывает по полочкам все попытки обосновать дифференциальное исчисление. Он никогда не любил лишней мебели — таких полок всего три.

«Мистическое дифференциальное исчисление» — называет он первую. На ней создатели, корифеи — Ньютон и Лейбниц. Им приходилось,— конечно, отнюдь не по злой воле — приписывать дифференциалам таинствен-

ные, необъяснимые свойства — они и нули и не нули одновременно. Но иначе ничего не получалось: чтобы результаты всегда были правильными, приходилось в одних случаях принимать одну точку зрения, в других — другую. Маркс рассматривает самый простой пример и пишет: «...этот *математически правильный результат основывается на столь же математически ложном в самом основании предположении*... Иначе тот же результат был бы получен и предложен математическому миру не с помощью фокуса, а посредством алгебраической операции простейшего типа».

Ньютон, выводя правило дифференцирования произведения двух функций u и v, был вынужден «насильственно уничтожить» член $u'v'm$, в который в качестве множителя входит бесконечно малая величина m. Ничего другого не остается делать и при выводе всех других формул дифференциального исчисления. Вот это-то и не устраивает Маркса. «...Почему насильственно уничтожаются стоящие на пути члены?» — спрашивает он. И разрешает собственное недоумение: «*Ответ* очень прост: это нашли чисто экспериментально».

И вот резюме, подводящее итог всему первому периоду в истории дифференциального исчисления — периоду Ньютона и Лейбница:

«Итак, сами верили в таинственный характер новооткрытого исчисления, которое давало правильные (и притом в геометрическом применении прямо поразительные) результаты математически положительно неправильным путем. Таким образом, сами себя мистифицировали и тем более ценили новое открытие, тем более бесили толпу старых ортодоксальных математиков и вызывали с их стороны враждебные вопли, будившие отклик даже в мире неспециалистов и необходимые для прокладывания пути новому».

Читая эти строки математических рукописей Маркса, нельзя еще раз не вспомнить «Анти-Дюринга» и еще раз

не подивиться глубине взаимопроникновения идей двух великих друзей. «...Почти все доказательства высшей математики,— писал Энгельс, — начиная с первых доказательств дифференциального исчисления, являются, с точки зрения элементарной математики, строго говоря, неверными. Иначе оно и не может быть, если, как это делается здесь, результаты, добытые в диалектической области, хотят доказать посредством формальной логики. Пытаться посредством одной диалектики доказать что-либо такому грубому метафизику, как г-н Дюринг, было бы таким же напрасным трудом, какой потратили Лейбниц и его ученики, доказывая тогдашним математикам теоремы исчисления бесконечно малых. Дифференциал вызывал у этих математиков такие же судороги, какие вызывает у г-на Дюринга отрицание отрицания, в котором, впрочем, как мы увидим, дифференциал тоже играет некоторую роль. В конце концов те из этих господ, которые не умерли тем временем, ворча сдались, но не потому, что их удалось убедить, а потому, что решения получались всегда верные».

Слово «единомышленник», когда его применяют к Марксу и Энгельсу, полно удивительно глубокого смысла...

«Даламбер сорвал с дифференциального исчисления покров тайны и тем самым сделал огромный шаг вперед». Эта фраза относится уже ко второму периоду — Маркс называл его «рациональным». Есть и третий, «чисто алгебраический», в котором ведущая роль принадлежит Лагранжу.

Скрупулезно изучает Маркс все известные способы дифференцирования, конспектирует страницу за страницей, сравнивает один метод с другим, но не находит удовлетворения. И лишь убедившись, что ничего нового в книгах ему уже не почерпнуть, откладывает в сторону конспекты и пишет выкладку за выкладкой безо всяких отсылок к авторитетам. Так появляется его собственный

способ дифференцирования, который Маркс назвал просто «алгебраическим».

К счастью, он успел написать несколько страниц, где эти мысли изложены не в форме разговора с самим собой, а как слова, обращенные к другому человеку. Маркс надписал на конверте: «Для Генерала» — так Лаура и Женни прозвали Энгельса за его военные занятия (статьи Энгельса о франко-прусской войне, напечатанные в 1870 году в «Pall Mall Gazette», привлекли внимание специалистов—и не удивительно, поскольку он точно предсказал битву при Седане и поражение французов; а за полтора десятилетия до этого, во время Крымской кампании, он напечатал в «New York Daily Tribune» обзоры военных действий, написанные с таким знанием дела, что американцы всерьез считали их автором генерала Скотта, главнокомандующего армией США).

Это и есть первое послание «Генералу» — Энгельсу, первая Марксова законченная математическая работа — «О производной функции».

«Сначала полагание разности, а затем обратное ее снятие приводит, таким образом, буквально к *ничему*. Вся трудность в понимании дифференциальной операции (как и в понимании *отрицания отрицания* вообще) заключается именно в том, чтобы увидеть, *чем* она отличается от такой простой процедуры и как ведет поэтому к действительным результатам».

Для Энгельса слова эти были «ясны, как солнце», потому, быть может, что в общении с Марксом он подверг себя в эти годы в области математики процессу «полного линяния», как признается он в предисловии к «Анти-Дюрингу». И результаты этого «линяния» столь ощутимы, что некоторые «математические» страницы этой книги, вызвавшей живейший интерес Маркса (он не только обсуждал с Энгельсом ее план, читал всю работу в рукописи, но даже написал сам главу об истории политэкономии),— математические страницы этой книги восприни-

маются так, словно они вышли из-под пера Маркса. «...Еще разительнее отрицание отрицания выступает в высшем анализе, в тех «суммированиях неограниченно малых величин», которые сам г-н Дюринг объявляет наивысшими математическими операциями и которые на обычном языке называются дифференциальным и интегральным исчислениями. Как производятся эти исчисления? Я имею, например, в какой-нибудь определенной задаче две переменные величины x и y, из которых одна не может изменяться без того, чтобы и другая не изменялась вместе с ней в отношении, определяемом обстоятельствами дела. Я дифференцирую x и y, т. е. принимаю их столь бесконечно малыми, что они исчезают по сравнению со всякой, сколь угодно малой действительной величиной и что от x и y не отстается ничего, кроме их взаимного отношения, но без всякой, так сказать, материальной основы,— остается количественное отношение без всякого количества. Следовательно, $\frac{dy}{dx}$, т. е. отношение обоих дифференциалов — от x и от y,— равно $\frac{0}{0}$, но $\frac{0}{0}$, которое берется как выражение отношения $\frac{y}{x}$. Упомяну лишь мимоходом, что это отношение между двумя исчезнувшими величинами, этот фиксированный момент их исчезновения, представляет собой противоречие; но это обстоятельство так же мало может нас затруднить, как вообще оно не затрудняло математику в течение почти двухсот лет. Но разве это не значит, что я отрицаю x и y, только не в том смысле, что мне нет больше до них дела,— так именно отрицает метафизика,— а отрицаю соответственно обстоятельствам дела? Итак, вместо x и y я имею в используемых мной формулах или уравнениях их отрицание, dx и dy. Затем я произвожу дальнейшие действия с этими формулами, обращаюсь с dx и dy как с величинами действительными, хотя и подчиненными некоторым особым

законам, и в известном пункте я *отрицаю отрицание*, т. е. интегрирую дифференциальную формулу, вместо dx и dy получаю вновь действительные величины x и y; на таком пути я не просто вернулся к тому, с чего я начал, но разрешил задачу, на которой обыкновенная геометрия и алгебра, быть может, понапрасну обломали бы себе зубы».

10

«Математические» страницы «Анти-Дюринга», особенно те из них, которые посвящены бесконечно малым,— это прямой отзвук Марксовых изысканий в области дифференциального исчисления. Энгельс выбирает для ответа Дюрингу и подробно развивает именно те вопросы, которые волновали в математике и Маркса, и которые они, безусловно, не единожды обсуждали с ним вдвоем.

Прежде всего, поскольку дифференцировать можно только функции, что вообще означает это слово? Что понимается под словами: «игрек есть функция от икс»? Простое объяснение, приготовленное Марксом для самого себя: «...значение y, для примера, меняется, когда на место x, например, подставляются численные значения 3, 4, 5 и т. д. Тут y называется функцией от x, потому что он должен подчиняться его приказу, как каждый функционер, хотя бы сам великий Вильгельм I, тоже от кого-нибудь зависит».

Итак, вот функция. Будем ее дифференцировать, то есть искать «производную от игрека по иксу», ту самую «эф-штрих от икс», о которой шла речь в «Интермеццо».

Как? Проще простого. Пусть x изменится на очень небольшую величину. Тогда и y, «подчиняясь его приказу», тоже отклонится от своего значения. Искомая производная и есть отношение этих отклонений икса и игрека, но — и в этом весь ужас положения! — лишь

когда отклонения стали бесконечно малыми. (Звучит главная музыкальная фраза «Интермеццо»:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}\Big).$$

Вот оно — «отрицание отрицания»! Сперва, чтобы найти производную, «полагали» разности, то есть считали, что отклонения существуют, а потом их «сняли», устремив к нулю. Пришли «буквально к ничему» — получилось знаменитое выражение $\frac{0}{0}$, под которое Маркс неоднократно подкапывался еще в своих алгебраических тетрадях.

«Так как в выражении $\frac{0}{0}$ испарился всякий след его происхождения и значения, то мы заменяем его на $\frac{dy}{dx}$, где конечные разности... появляются в символической форме как *снятые* или *исчезнувшие*... Утешение, за которое крепко держатся некоторые рационализирующие математики, что якобы количественно dy и dx в действительности являются лишь бесконечно малыми, [что их отношение] лишь близко к $\frac{0}{0}$, есть химера...»

И вот слова Энгельса, получившего это первое послание: «Вещь ясна, как солнце, так что, право, диву даешься, почему математики так упорно настаивают на том, чтобы окутывать ее тайной. Но это происходит из-за односторонности мышления этих господ. Решительно и без обиняков признать, что $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$,— это не укладывается у них в черепе. И однако ясно, что $\frac{dy}{dx}$ лишь тогда может быть чистым выражением происходящего с x и y процесса, если исчезли даже последние следы *количеств* x и y и осталось лишь выражение происходящего процесса их

4 949

изменения без всякого количества... Этот способ заслуживает величайшего внимания, в особенности потому, что он ясно показывает, что обычный метод, при котором пренебрегают *dxdy* и т. д., *положительно неправилен*. Особенно великолепно при этом то, что только когда $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, и *только тогда*, операция является математически абсолютно правильной».

Позже Энгельс писал Марксу:

«...Основное различие твоего и старого метода состоит... в том, что ты даешь *x*... *действительно изменяться*».

У Ньютона, Лейбница, Даламбера, Лагранжа — у всех у них величина меняется из-за того, что к ней «приращивается» другая величина — некая постоянная, которая существует заранее, сразу, «как плод рядом со своей матерью до того, как та забеременела». А Марксов метод построен так, чтобы отказаться от такого логического сдвига. Математическая величина во всех его рассуждениях меняется сама: не «приращение» готового куска, а развитие, не статика, а динамика. В математику вошло движение — и тогда лишь она стала «высшей». Так пусть ее формулы отражают это движение! Старая, как сама философия, проблема — не есть ли движение сумма неизменных состояний или, в известной формулировке апории Зенона, догонит ли Ахилл черепаху — явственно просвечивает сквозь формулы его математических рукописей.

11

Энгельсу не терпелось поделиться с кем-нибудь радостью, которую доставили ему математические работы Маркса. «...Я показывал однажды твоему Адольфу пример нового обоснования Марксом дифференциального исчисления»,— сообщал он своему и Марксову дру-

гу и соратнику Фридриху Адольфу Зорге, члену I Интернационала и организатору его американской секции, двоюродному деду прославленного советского разведчика Рихарда Зорге. Адольф — это сын Фридриха Зорге, инженер-механик. Энгельс ничего не говорит о том, как Адольф отнесся к показанным ему материалам. Видимо, они его не заинтересовали. И не удивительно, инженеры ведь не задумываются над обоснованием тех или иных математических методов, они просто применяют их.

Среди друзей Энгельса были и крупные ученые: химик Шорлеммер, видный специалист по предельным углеводородам, фигура небывалая по тем временам — коммунист и член Королевского общества; знаменитый зоолог Рей Ланкастер; были экономисты, социологи, историки. Но людей, достаточно знавших математику, не было никого. Никого, если не считать адвоката Самюэла Мура, переведшего на английский язык «Капитал» и «Манифест Коммунистической партии».

По нашим нынешним представлениям Мур был не слишком силен в высшей математике. Впрочем, у него самого на этот счет был несколько иной взгляд. К тому были достаточные основания.

Мур почерпнул свои математические знания из тех книг, по которым занимались в английских университетах и прежде всего в Кембридже. А там — и для британского склада мысли это естественно — до такой степени чтили Ньютона, что даже попытка пользоваться «континентальной» символикой — обозначениями Лейбница — долгое время расценивалась как «кощунственное прегрешение против памяти сэра Исаака». Маркс, конечно, хорошо знал об этом. «Вряд ли есть необходимость заметить, — писал он в своих математических работах,— что Ньютон господствовал в Англии вплоть до первых десятилетий XIX века». Девятнадцатый век был уже на исходе, а на Британских островах практически ничего не знали о той математике, что развивалась в Ев-

ропе, хотя переплыть Ла-Манш и в ту пору было пустяковым делом.

(Харди, известный английский ученый, написал в 1917 году «Курс чистой математики», в котором постарался окончательно разрушить этот противоестественный для науки барьер. Переиздавая свой труд через двадцать лет, он предпослал книге любопытные слова: «Она была написана в то время, когда в Кембридже пренебрегали математическим анализом, и ее патетический стиль кажется теперь немного смешным. Если бы я переписал ее теперь, то я бы уже не писал (по выражению проф. Литтлвуда), как «проповедник, разговаривающий с каннибалами».)

Из-за культа Ньютона, культа флюксий и моментов английские математики сумели сильно отстать от своих европейских коллег: их понятия о дифференциальном исчислении оставались на «каннибальском» уровне. На континенте уже был создан в общих чертах современный математический анализ вместе с теорией пределов, уже были изданы труды Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора, а на островах об этом почти ничего не слышали. Математическая мысль Кембриджа отставала чуть ли не на полвека. Мур — как и Маркс — пользовался учебниками, которые устарели еще до того, как попали на полки библиотек. Но если Маркс, даже не будучи знаком с новейшими европейскими работами, сумел раздвинуть рамки английской школы, то Муру сделать это было не суждено.

И тем не менее это был единственный человек, с которым Маркс и Энгельс могли говорить о математике. Когда Маркс, увлеченный анализом, решил применить его в экономике, чтобы вывести внутренние законы экономического развития в математической форме, он обратился за советом именно к Муру. И ему же десять лет спустя Энгельс пересылает Марксовы математические труды. Мур принимается за их изучение — и не видит

в них ничего, кроме того, что чертеж построения касательной к кривой, следующий из Марксова метода, совпадает с обычным, общепринятым. Но ведь всякий чертеж — это уже статика, неподвижность, неизменность, а в Марксовых рукописях речь идет о новом толковании динамики процесса!

Энгельс, разочарованный и огорченный, пишет Марксу в Вентнор:

«При сем 1) математическое исследование Мура. Вывод, что алгебраический метод есть не что иное, как замаскированный дифференциальный метод, относится, разумеется, только к его собственному методу геометрического построения... Я написал ему, что ты не придаешь никакого значения способу, каким кто-то делает для себя вещи наглядными путем геометрического построения. ...Ведь всякое графическое изображение изменения является по необходимости изображением *протекшего* процесса, *результата*, следовательно, величины, сделавшейся постоянной...»

Маркс отвечает Энгельсу сразу же, в день получения письма:

«Сэм, как ты тоже сразу заметил, критикует примененный мной аналитический метод тем, что спокойно отбрасывает его в сторону и занимается вместо этого геометрическим применением, о котором я еще не сказал ни слова.

Таким же манером я мог бы разделаться со всем... историческим развитием анализа, заявив, что оно *практически* существенно не повлияло на применение дифференциального исчисления к геометрии, то есть на геометрическую интерпретацию».

Мур был на двенадцать лет моложе Маркса. Говорят, что в математике возраст играет немаловажную роль — крупнейшие свои открытия математики совершают, как правило, в первой половине жизни, когда свежи восприятия и не растрачен задор молодости. Маркс вошел

в глубины математики на склоне лет, но вошел тем же «дерзким парнем», каким был на брюссельской эмигрантской квартире и каким оставался всю жизнь.

Этой дерзости и свежести не хватило Муру, хотя на его стороне были еще не прожитые им двенадцать лет жизни.

Того, что лежало на поверхности Марксовых рукописей, Мур не понял. Того, что было скрыто в их глубине, он попросту не увидел.

12

Заметим в скобках: у Самюэла Мура, лондонского адвоката, в математике в конце концов не более чем серьезного дилетанта (пусть даже и с кембриджским образованием), есть все-таки если не оправдание, то хоть извинение. Но можно ли оправдать математиков-профессионалов, а таковые, читавшие математические работы Маркса, но не понявшие их, видимо, существовали, хоть нам и неизвестны их имена.

В книге Франца Меринга, по общему признанию, одного из лучших биографов Маркса, есть такие слова: «Кроме изящной литературы Маркс обычно находил отдых еще в совершенно иной области духовного творчества. Особенно в дни душевных огорчений и тяжких страданий он часто искал убежище в математике, оказывавшей на него успокоительное влияние. Мы оставляем в стороне вопрос, действительно ли он сделал в этой области самостоятельные открытия, как утверждали Энгельс и Лафарг. Математики, рассматривавшие оставшиеся после него рукописи, держатся другого мнения». Меринг не указывает никаких подробностей, связанных с изучением Марксова математического наследства специалистами-математиками. Но ясно одно: кто бы это ни был и как бы внимательно он ни изучал рукописи Марк-

са, он все равно не мог прочесть их целиком, потому что до самого последнего времени они не были расшифрованы и упорядочены. Рассчитывать же, что человек, как бы капитально он ни был подкован математически, сумеет пробраться сквозь Марксову скоропись, сквозь многоязычие его более чем тысячестраничного математического наследства,— рассчитывать на это не приходится никак.

Но есть и другая, пожалуй, еще более важная сторона дела.

«По-моему, математикам, постольку, поскольку они математики, нет нужды заниматься философией. К тому же это мнение не раз высказывали и многие философы». Слова эти принадлежат знаменитому французскому математику Анри Лебегу. В них очень четко выражена позиция, которую занимали практически все математики прошлого века. «Беспокойство по поводу оснований математики чаще всего возникает в критические моменты, когда кажется, что основополагающие идеи становятся шаткими, и математики вынуждены проверять их», — это мнение профессора философии Гарвардского университета У. В. Куайна имеет под собой, видимо, достаточно твердую почву. Что же касается математики того времени, то положение дифференциального исчисления в ней отнюдь не казалось шатким. Наоборот, с помощью строгого определения основных понятий математического анализа, скрупулезным и точным описанием «действительного числа», «предела», «непрерывности», целой плеяде математиков девятнадцатого века, начиная с Коши, удалось временно вернуть равновесие колеблющемуся зданию анализа.

В то время когда Маркс, не знакомый с этими работами, искал выход своим сомнениям, современные ему математики пребывали в состоянии некоторой самоуспокоенности; процесс обоснования дифференциального исчисления представлялся им доведенным почти до кон-

ца. Но Маркс увидел выход из тупика не там, где забрезжил свет математикам, жившим в одни годы с ним.

Он проложил дорогу прямо к одному из направлений математики двадцатого века. Вот почему Маркс и современные ему математики кое в чем оказались как бы говорящими на разных языках. Это движение по разным дорогам и привело, вероятно, к тому, что математики девятнадцатого столетия — даже если бы им удалось разобраться в Марксовых записях — не разглядели бы в них ничего, кроме возврата к старым, уже, казалось бы, разрешенным и преодоленным противоречиям, а математики наших дней обнаружили на страницах этих рукописей немало идей, столь близких их собственным.

Впрочем, об этом — дальше. А пока следует сказать, что нет, конечно, никаких оснований категорически утверждать, что прав Франц Меринг, весьма сдержанно повествующий о признании математиками значения оставшихся после Маркса математических рукописей, а не Поль Лафарг, который писал в своих воспоминáниях: «В это время — время душевных страданий — он написал работу по исчислению бесконечно малых величин, которая, по отзывам читавших ее специалистов, имеет большое значение». Тем не менее нам неизвестен ни один из математиков тех времен, который бы сумел проникнуть в суть того, что интересовало Маркса в дифференциальном исчислении.

13

На страницах Марксовых рукописей, где строгие математические формулы уживаются с такими, например, фразами, как «нисхождение в ад через 0», где переплетаются английские, немецкие и французские слова, где сосуществуют азбучные истины, выписанные из учебников, и собственные мысли Маркса,— десятки раз встречаются

абзацы, где Маркс снова и снова возвращается к одной и той же мысли.

Мысль эту можно выразить в нескольких словах: дифференциал есть оперативный символ. Не некоторая величина, обладающая особыми свойствами, а символ определенной операции. Пользуясь словами Энгельса, «выражение происходящего процесса... без всякого количества». Энгельс, прочитав Марксово послание, тонко почувствовал эту сторону дела. «Тебе нечего опасаться, что в этом тебя опередил какой-нибудь математик», — пишет он в ответ. И, действительно, Маркс первым понял, что подобное определение дифференциала имеет право на жизнь. Более того, он показал, как именно, в результате какого скрытого процесса обретает дифференциальный символ право на самостоятельное существование.

Обдумывая эти идеи, Маркс, вероятно, вспоминал первые годы своих математических занятий. Феллер с Одерманном, кроме дотошности и пунктуальности, внесли в свою «Коммерческую арифметику» одну любопытную особенность: они рассматривали все арифметические действия как некие операции, которые изменяют либо форму, либо значение числа. Например, сократить дробь — это изменение ее формы, а вот применить к ней сложение, вычитание, умножение или деление — это уже изменение ее значения. Таким образом, Феллер и Одерманн подходят к одному из чисел, участвующих в арифметических действиях, как к некоему оператору, изменяющему другое число.

«Ньютон и Лейбниц, как и большинство их последователей, действуют с самого начала на почве дифференциального исчисления, а потому и дифференциальные выражения служат им сразу оперативными формулами для отыскания реального эквивалента. Все дело в этом».

«Все дело» в том, что сначала ищут производную функции. Это, по выражению Маркса, «реальный» процесс.

С ним были знакомы все математики, занимавшиеся дифференциальным исчислением. Но как только полученную производную обозначили и таким способом появился «символический дифференциальный коэффициент», происходит довольно забавная история: «Первоначально возникший как символическое выражение «производной», т. е. уже выполненных операций дифференцирования, символический дифференциальный коэффициент теперь играет роль символа тех операций дифференцирования, которые только предстоит еще произвести». Значок $\frac{dy}{dx}$ становится «оперативной стратагемой», подлежащей выполнению независимо от вида функции! Он указывает, предписывает, командует, что и как надо сделать с функцией, чтобы получить ее производную.

Происходит «оборачивание метода» — «оборачивается постановка вопроса, поскольку вместо того, чтобы искать символическое выражение для реальных дифференциальных коэффициентов (для $f'(x)$), ищется реальный дифференциальный коэффициент для его символического выражения». Символ устремляется из прошлого в будущее, из указания на уже содеянное он превращается в приказ о том, что еще только предстоит совершить.

«...Не подлежит сомнению, что на этот поворот, на это оборачивание ролей никто из математиков не обратил внимания, и тем более никто из них не доказал необходимость этого на каком-либо совершенно элементарном дифференциальном уравнении». Маркс нисколько не заблуждается на этот счет, он совершенно отчетливо сознавал, что идет по нехоженой тропе. И в самом деле, подобные идеи впервые появились в математической литературе лишь много десятилетий спустя, когда начала создаваться общая теория символических исчислений.

И в первой работе — «О понятии производной функции» и во второй — «О дифференциале» можно найти немало цитат, каждая из которых вполне выражает мысль

Маркса. Он стремился отшлифовать ее, это совершенно явственно чувствуешь, листая рукописи, напрочно поселить ее у себя в голове и подарить Энгельсу в самом ярком, афористичном, очевидном и вместе с тем парадоксальном виде. Отсюда фразы вроде: «Односторонне появились они на свет, тени без тела, которое их отбросило» или «Множитель... есть пуповина, которая указывает на происхождение производной». Отсюда — непрестанное, навязчивое даже, повторение слов об оборачивании метода, о смене ролей, о «символическом злоключении», которое происходит со значком $\frac{dy}{dx}$. И наконец, итоги: «...дифференциальное исчисление выступает как некое специфическое исчисление, которое оперирует уже самостоятельно, на собственной почве, ибо исходные пункты его $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ суть лишь ему принадлежащие и его характеризующие математические величины...» Они «тотчас же превращаются в *оперативные символы,* в символы процессов, которые должны быть выполнены».

14

«...Только Лагранжу пришла в голову мысль свести дифференциальное исчисление к строго алгебраической основе. Быть может, ему предшествовал в этом отношении *Джон Ланден*, английский математик середины *18* века, в его «*Residual Analysis*». Но чтобы составить себе окончательное суждение об этом, я должен предварительно посмотреть эту книгу в Музее».

Намерение изучить работу ныне совершенно забытого землемера и члена Королевского общества неоднократно зафиксировано на страницах математических рукописей Маркса. Оно продиктовано, очевидно, словами Лагранжа, которые Маркс не мог не прочитать: «Один

искусный английский геометр, сделавший в анализе важные открытия, предложил в последнее время заменить метод флюксий, которому до сих пор пунктуально следовали все английские геометры, другим методом, чисто аналитическим и аналогичным дифференциальному...» Однако Марксу так и не удалось достать «Анализ вычетов» Джона Ландена в библиотеке Британского музея. Впрочем, он едва ли нашел бы там что-либо для себя новое, разве только еще раз убедился, что в своем стремлении подвести под все дифференциальные операции строгую и логически безупречную базу он был не одинок. Ланден, так же как и Лагранж, пытался найти простые и всегда верные правила, по которым можно было бы для любой функции тут же построить ее производную.

Этот набор правил, безотказно срабатывающий во всех случаях жизни, очевидно, лишал сна почти каждого мыслителя и семнадцатого и восемнадцатого веков. Универсальный метод заменил собой философский камень — нечто, завладев которым, знаешь, как превратить что угодно во что угодно. Этот всепригодный рецепт искал Лейбниц, он верил, что наступит время, когда люди научатся решать самые сложные вопросы с помощью математических правил. Вместо того чтобы спорить или враждовать, они возьмут в руки карандаши и будут вычислять. Ферма придумал свод правил, руководствуясь которым удавалось справиться со многими задачами. Ему тоже хотелось считать его универсальным. «Этот метод никогда не изменяет,— писал он.— Напротив, он может быть распространен на многочисленные прекрасные вопросы». Декарт утверждал в своем «Рассуждении о методе», что, обладая хорошим руководством к действию, получаешь преимущество перед более сильными и умными, потому что «те, кто ходят очень медленно, могут продвинуться значительно больше, если они следуют прямым путем, по сравнению с теми, которые бегут, но удаляются от него».

Ньютон, как известно, тоже искал и тоже безуспешно,

общий прием, с помощью которого можно дифференцировать любую функцию. Поначалу ему казалось даже, что он нашел этот универсальный рецепт: каждую функцию, какой бы сложной она ни была, надо научиться раскладывать в степенной ряд, то есть заменять ее суммой самых простых функций. Затем, найдя производную от каждой из них,— а это-то уже проще простого,— сложить все производные вместе — и ответ готов. Ньютон считал, что он открыл и «весьма тщательно доказал общий метод», пригодный для любых функций. Но скоро он понял, что торжество его было преждевременным: вовсе не каждая функция раскладывалась в ряд, состоящий из конечного числа членов, а складывать бесконечное количество производных было не таким простым делом. До конца дней своих Ньютон пытался обнаружить какое-нибудь решение этого вопроса, найти пусть сложную, но всегда пригодную процедуру, с помощью которой можно было бы дифференцировать любую функцию, но, не найдя ее, так и не решился при жизни опубликовать свои капитальные труды: «Аналист» и «Метод флюксий и бесконечных рядов».

Математики рангом пониже не так взыскательно относились к своим внезапным прозрениям. Викарий из английского графства Кент Джон Кирби (известный в истории математики благодаря тому, что перевел с латыни и издал «Математические лекции» учителя Ньютона Исаака Барроу) написал книжку под заголовком: «Учение об ультиматорах. Или открытие истинного и подлинного обоснования того, что до сих пор ошибочно преобладало под неподходящими названиями флюксий и дифференциального исчисления. С помощью которого мы теперь полностью освободим эту вершину всей математической науки от слепого и негеометрического метода, который до сих пор затруднял доступ к ней».

...Изучая труды математиков семнадцатого и восемнадцатого веков, Маркс мог найти еще немало примеров—

пусть не таких саморекламных — поисков математического философского камня. Но, по существу, тоска по универсальному методу восходит к седой древности, ибо что иное двигало рукой Архимеда, когда он писал свое «Послание Эратосфену»?

И потому может показаться, что в этой своей части математические воззрения Маркса давно устарели — ведь сведения, которыми он располагал, не выходили за рамки известного Лагранжу, а саму мысль о всемогущем методе уж никак нельзя считать новой. И тем не менее строгость Марксовой логики свидетельствует, что он искал не просто какой-то метод или прием, он жаждал получить алгоритм, «стратагему действий», как писал он, набор ясных, точных и однозначных предписаний, указывающих, с чего нужно начинать и что делать дальше, шаг за шагом, пока задача не будет решена.

Он искал такую «стратагему», чтобы она смогла дать математику точную программу действий в любом, даже самом запутанном «дифференциальном вопросе». Какое-то время ему даже казалось, что он сумел ее обнаружить: «Таким образом... я нашел две развитые далее оперативные формулы, образующие основу всего дифференциального исчисления... я могу при отыскании dy, $\frac{dy}{dx}$ пользоваться ими так же, как таблицей умножения в арифметике».

Правда, формулы оказались не универсальными, они пригодны лишь для определенных, так называемых «аналитических», функций, то есть таких, которые можно разложить в ряд, представить в виде суммы других, элементарных функций. Да и сами формулы, предложенные Марксом, не содержат в себе принципиально нового. Но мысль обосновать математический анализ с помощью строгих алгоритмов намного обогнала его время. «Обилие законов доставляет нередко повод к оправданию по-

роков, и государство лучше управляется, если их немного, но они строго соблюдаются». Без большой натяжки можно сказать, что эти общеизвестные слова переосмыслены Марксом и переведены на язык математической теории. Он, так мало зная даже о современных ему математических веяниях, сумел все-таки нащупать правильный путь к тому, чтобы обуздать «пороки» дифференциального исчисления.

15

И еще один философский (и в то же время математический) вопрос волновал Маркса — вопрос уже, по сути дела, нашего двадцатого века.

Ученый, изобретающий новое исчисление, выдумывает для него значки, символы по своему вкусу. Так ли уж важно, что это за символ? Связан ли ученый необходимостью отразить символом реальный процесс или здесь полный простор вкусовщине и произволу? Ведь если считать, как это делал великий математик Анри Пуанкаре, что математика — это игра, правила которой устанавливаем мы сами, то такой выбор действительно ничем не ограничен.

...Еще в алгебраических тетрадях, когда Маркс знакомился с книгой Бушарла, он законспектировал то место, где французский математик предлагает заменить символ $\frac{0}{0}$, в котором «исчез всякий след как функции, так и переменной», на выражение $\frac{dy}{dx}$, «напоминающее *нам*, что *функцией была* y, *а переменной* x». Но так ли уж важно, что и как обозначать в математике? Маркс, не колеблясь, в самых ранних математических тетрадях четко отвечает на этот вопрос. Далеко не все равно! С симво-

лом $\frac{0}{0}$ никакого дифференциального исчисления построить нельзя, а с символом $\frac{dy}{dx}$ можно.

Почему?

«Карандаш бывает умнее самого математика»,— основатель Геттингенской школы Феликс Клейн недаром произнес эти слова: чтобы выполнять какие-то операции, надо прежде всего облечь свою мысль в удачную символическую форму.

$$f'(x) = \frac{0}{0}.$$

Что можно извлечь из этого равенства? Да ничего, ведь написать $0 = 0 \cdot f'(x)$ — значит ничего не написать: что бы на нуль ни умножилось, нуль и получится.

А если ввести другое обозначение: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$?

Тогда сразу же появляется равенство $dy = dx \cdot f'(x)$. Это — первая из тех двух оперативных формул, о которых говорит Маркс. Это — «стратагема действий» для получения дифференциала dy.

Маркс обосновывает право пользоваться выражением $\frac{dy}{dx}$ как обыкновенной дробью с числителем и знаменателем, как удобным символом. Право, которое до работ Коши присвоили себе математики, не вникая в существо дела и потому не умея объяснить, почему всегда получается правильный результат, если следовать раз навсегда заданным правилам.

Исчезает «ужасающий вид» производной, и, снова пользуясь цитатой из рукописей, оказывается, что «в действительности казус не столь злостен».

«Недостаточно только иметь хороший разум. Главное — хорошо применять его». Декарт, наверное, ничего не имел бы против того, чтобы эти его слова вспомнил человек, перевернувший последнюю страницу Марксовых математических рукописей.

Интермеццо второе

Там, где прежде были границы науки, там теперь ее центр.

Георг Лихтенберг

1

«Когда в математику были введены переменные величины и когда их изменяемость была распространена до бесконечно малого и бесконечно большого,— тогда и математика, вообще столь строго нравственная, совершила грехопадение: она вкусила от яблока познания, и это открыло ей путь к гигантским успехам, но вместе с тем и к заблуждениям. Девственное состояние абсолютной значимости, неопровержимой доказанности всего математического навсегда ушло в прошлое; наступила эра разногласий...»

Энгельс написал эти слова спустя несколько лет после того, как прочел математические послания Маркса. Но годы не ослабили первого сильного впечатления, ко-

торое они на него произвели: даже система сравнений и метафор осталась той же, что и в Марксовых математических рукописях.

Проблема обоснования математики — самая, пожалуй, важная в математическом наследии Маркса. «Со времен греков говорить «математика» — значит говорить «доказательство», — начинают свой знаменитый труд «Начала математики» французские ученые, работающие под псевдонимом Бурбаки. В этом и состоит особенность математики — прародительницы наук, сквозь тысячелетия пронесшей свою строгость в рассуждениях и построениях. «Неопровержимость — имя тебе, математика, — пишет современный ученый У. В. Куайн. — Пусть представитель естественных наук удовлетворяется очевидностью, математику нужны доказательства. И в самом деле, в какой еще области знаний можно надеяться найти основания, хотя бы наполовину столь же прочные?»

Непрочность того фундамента, на котором покоилось все многоэтажное здание дифференциального исчисления, очень скоро открылась Марксу.

«Труднейшая даже для нашего времени задача обоснования дифференциального исчисления стала для него пробным камнем силы метода материалистической диалектики в применении даже к столь абстрактной науке, как математика».

«Поиски алгебраических корней дифференциального исчисления, обнаруживающиеся в математических рукописях Маркса... указывают, что путь к логическому обоснованию математических дисциплин пролегает обязательно через изучение их действительной истории».

Эти цитаты (они взяты из докторской диссертации К. А. Рыбникова «О работах Карла Маркса по математике») показывают отношение историка математики к Марксовым математическим трудам.

 Совершая длительные и сложные исторические экскурсы, углубляясь в тонкости дифференциального ис-

числения, Маркс искал простых и доступных наглядному пониманию первооснов, на которых базируется этот важнейший отдел математики. Его нисколько не удивляло, что и тут, в новой для него области знаний, истинные причины событий, их механизм, скрыты от глаз наблюдателя. Ведь он всегда считал, что если бы явления и их сущности совпадали, то всякая наука была бы излишня. И потому со свойственной ему настойчивостью изучал одного автора за другим, все ближе подбираясь к цели своего исследования.

Маркс шел к ней очень последовательно, отнюдь не стремясь просто приобщиться к тонкостям математических выкладок. Его интересовало лишь главное, основное, а технические подробности лишь постольку-поскольку. «Можно бы изложить таким манером все операции дифференциального исчисления,— пишет он на одной из страниц своих математических рукописей,— но это было бы чертовски бесполезным педантизмом».

Так двигался в своих математических занятиях Маркс, строго очертив самому себе поле деятельности, удивительно быстро впитав свойственное всем истинным математикам стремление к совершенству логических начал. Эта тяга к незыблемости оснований не угасла и сегодня. «...В отличие от времени создания Ньютоном и Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления математики умеют сейчас без большого промедления подводить фундамент логически безукоризненных логических построений под любые методы расчета, родившиеся из живой физической и технической интуиции и оправдавшие себя на практике. Но фундамент этот иногда оказывается столь хитро построенным, что молодые математики, гордые пониманием его устройства, принимают фундамент за все здание. Физики же и инженеры, будучи не в силах в нем разобраться, изготовляют для себя вместо него временные шаткие подмостки»,— пишет академик Андрей Николаевич Колмогоров в газетной статье,

само название которой декларирует его позицию. Она называется «Простота — сложному», и пафос ее заключается в призыве «привести общие логические основы современной математики в такое состояние, чтобы их можно было излагать подросткам четырнадцати-пятнадцати лет».

Эта мысль о кристальной ясности основных положений, об изначальной простоте сложнейшей и абстрактнейшей из наук была свойственна гигантам математики, в том числе, например, и Давиду Гильберту, который полагал, что математическую теорию можно считать вполне законченной лишь тогда, когда ее удается объяснить первому встречному.

Маркс проникся этой мыслью с первых же дней своих самостоятельных занятий высшей математикой.

2

Иероним Цейтен, историк математики и великий знаток математических текстов (это его ученику Гейбергу посчастливилось разыскать в хранилищах одного из константинопольских монастырей архимедово «Послание Эратосфену»), уподобил изобретение нового исчисления переходу от ремесленного производства к фабричному.

В этом сравнении глубокий смысл. Вещь, созданная талантливыми руками ремесленника, хранит на себе печать его вкусов, его индивидуальности. Изготовить ее сумеет далеко не всякий, да и от самого мастера это потребовало немалых усилий и долгого времени. Нынешняя ценность такого уникального предмета для нас — не в его полезности, а в той частичке души, которую мастер вложил в свое детище, в том, что мы осязаем в предмете человека, его создавшего. Изделия фабричного производства лишены этой человеческой теплоты. Но зато их

много, они под силу каждому, кто становится к станку.

Задачи, одоленные великими математиками прежних времен, подобны созданиям ремесленников. Но со дня, когда изобретен общий метод, с ними способен справиться любой грамотный человек — правда, его решение обнаружит не душу мастера, а фабричное клеймо. (Для того чтобы «совершать с дифференциалом чудесные операции,— пишет Маркс в своих математических рукописях,— отнюдь не требуется проникновение в природу dx, dy»).

Вся история математики полна таких переходов: от единичных находок и открытий — к массовому методу, от исключений — к правилу, от прозрений гениев — к бездумному, механическому повторению заученных приемов. Высокие научные ценности с течением времени становятся разменной монетой школяров.

Но этот поток, низвергающийся с вершин в низины, парадоксально сочетается со встречным движением к заоблачным высям абстракций.

На первую ступеньку абстракции человечество поднялось, кутаясь в звериные шкуры. Величайшим математиком нашей планеты был тот, кто обнаружил, что два топора и два барана имеют нечто общее — количество, и придумал ему меру — число.

Тысячелетия протекли, пока люди сумели разглядеть нечто общее и в самих числах и изобрели четыре правила арифметики — первое исчисление, доступное не избранным, а тысячам и миллионам.

Следующей великой ступенью была алгебра — математики ввели буквенные символы, под каждым из которых могло скрываться любое число.

Еще выше — функции: синусы, косинусы, тангенсы, логарифмы, степени, корни всяких степеней... Они складываются, делятся, умножаются — становятся предметом исчисления, как раньше числа и буквы.

И, наконец, новый этап — появилось понятие опера-

тора — значка, диктующего порядок операций, которым надо подвергнуть функцию, чтобы преобразить ее в другую, с какими-то вполне определенными свойствами, скажем, такую, чтобы она была производной от «оперируемой»...

3

Маркс ощущал этот исторический процесс. Именно потому он искал в алгебре прообразы дифференциального исчисления, и именно отсюда идет его понимание нового исчисления как своего рода алгебры, надстроенной над обычной алгеброй и включающей, кроме чисел, букв и обозначений функций, еще и дифференциальные символы.

Математики пытались объяснить дифференциалы как некую количественную реальность. Для них эти значки были прежде всего отражением некоторых величин, другого понимания дифференциалов у них не было и они цеплялись за него, боясь потерять ощущение твердой почвы под ногами. Маркс сознательно отказался рассматривать дифференциалы как некие величины и оставил за ними лишь значение символов, связанных с определенными действиями. Он отбросил столетиями тянувшийся за дифференциалом след бесконечно малой величины и стал рассматривать его как некий указующий знак, говоря языком современной математики — «оператор». Это означало — подняться еще на одну ступень математической абстракции.

Историю дифференциального исчисления Маркс изучал не для того, чтобы проставить даты жизни и смерти великих ученых и годы выхода в свет капитальных научных трудов. Он стремился извлечь историю математики из сути самих математических процессов. «Историческое развитие всех наук приводит к их действительной исходной точке только через множество перекрещиваю-

щихся и обходных путей», — эта его старая мысль оказалась и на этот раз удивительно продуктивной. Она позволила Марксу отделить бесконечно малые, исторический путь получения математической истины от самой истины — дифференциала как оперативного символа нового математического процесса.

4

Что же такое оператор?

Маркс впервые встретился с этим понятием, вероятно, штудируя Феллера и Одерманна. Оно оказалось чемто близким его складу мышления и было немедленно взято на вооружение. Простейший оператор, каким его трактовали директора коммерческих училищ, послужил трамплином для предложенного Марксом толкования дифференциального символа как оператора сложного математического процесса.

Оператор есть некто, выполняющий определенную операцию.

Человека, производящего такие операции, одну или несколько, или управляющего их выполнением, тоже называют оператором.

Оператор сортирует корреспонденцию на почтовом предприятии, разделяя ее по пунктам назначения. И оператор управляет сложнейшим агрегатом — исполинским блюмингом, нажатием рычагов и кнопок приводя в движение многотонные слитки металла.

Простейший неодушевленный оператор — станок-автомат, стоящий в заготовительном цехе завода. Настроенный на определенную длину заготовки, он нарезает на равные куски брусья и трубы, независимо от того, какова площадь поперечного сечения попавшего к нему «в лапы» предмета, и от того, из какого металла этот предмет изготовлен.

Подобный же оператор — автомат, изгибающий любые прутки под одним и тем же углом.

В качестве более сложного оператора можно представить себе некую автоматическую линию, состоящую из печи и литейной машины. Вы засыпаете в горло печи любой металл, в любом виде, а на выходе получаете ряд изделий из этого металла, имеющих заданную форму.

Математический оператор — это машина (воображаемая, конечно!), которая производит определенные математические преобразования над математическим сырьем. Устройство такой машины можно представить себе каким угодно сложным, а в роли математического сырья могут выступать любые математические объекты.

Что же касается оперативного символа, то это всего лишь условный значок, указывающий: в этом месте должна быть применена машина-оператор.

Сырьем для Марксова оператора служили функции, а операцией, которая производилась над ними, было дифференцирование.

5

Для Ньютона и Лейбница дифференциал — это бесконечно малое приращение переменной. Что значит «бесконечно малое приращение», ни тот, ни другой так и не сумели объяснить, хотя им, вероятно, и казалось, что объяснение где-то совсем рядом и вот-вот найдется. Это «вот-вот» заняло два столетия. Огюст Коши в двадцатых годах девятнадцатого века дал точное и строгое определение бесконечно малой величины. Математики немецкой школы — Вейерштрасс, Абель, Дедекинд, Кантор завершили к концу века построение здания анализа. Оно стало теперь строгим и прочным, но ценой тяжеловесности конструкций: для того чтобы определение дифферен-

циала было безукоризненным и наглядным, пришлось дифференциалы независимой и зависимой переменной определить по-разному. Строгость определения, таким образом, оплачена здесь тем, что в каждой задаче приходится с самого начала выделять некоторые величины как независимые, а ведь в реальных задачах, которые ставятся жизнью, все величины так или иначе зависят друг от друга.

...Пока рукописи Маркса лежали в архивах, французский математик Жак Адамар (по всем формальным признакам самый талантливый из абитуриентов Эколь Нормаль, поскольку набрал при поступлении в нее рекордное число баллов за все время существования этой высшей школы) попытался избавиться от обременительных ограничений. Он сумел сделать это, определив дифференциал как некий оператор. Адамар отказался от наглядности, но придал анализу недостававшую ему долю изящества. Сделано это было им через четыре десятилетия после смерти Маркса.

Когда в 1933 году часть Марксовых математических рукописей была впервые опубликована, советский исследователь В. И. Гливенко сравнил работы Маркса и Адамара и показал, что оба они пришли к понятию оперативного символа формально одним и тем же способом — извлекли его из дифференциала сложной функции. Но истинные пути к новому определению не совпадают у Маркса и Адамара ни в одной точке: первый пришел к своему пониманию дифференциала, стремясь постичь, какое место занимает новое исчисление в общей системе математики, второй — пытаясь придать этому исчислению наиболее общую и изящную форму.

Глубина подхода позволила Марксу подметить общую черту, свойственную любому символическому исчислению,— оборачивание метода. Символ устремляется из прошлого в будущее, из указания на уже содеянное он превращается в приказ о том, что еще только предстоит совершить.

Это — непреложный закон всех символических исчислений, общую теорию которых современные математики еще только начинают разрабатывать.

6

Математика двадцатого века поднялась на новую ступень абстракций. Она стала изучать объекты еще более сложной природы; в них меняются не только величины, но даже сам характер зависимости между ними. Предметом исследования стали не просто переменные величины, а переменные зависимости между переменными величинами! В новой области — она получила название функционального анализа — получили права гражданства основные понятия дифференциального и интегрального исчислений, которые к тому времени отошли уже в разряд «классического» анализа.

В 1937 году в журнале французских математиков появилась статья Мориса Фреше «О понятии дифференциала». Фреше продолжил мысль Гливенко и показал, что операторное понятие дифференциала в функциональном анализе шире, чем обычное определение дифференциала. Он привел примеры задач, где это обычное определение оказывается неработоспособным, а операторное сохраняет свою силу. Фреше в этой работе писал: «Гливенко, опубликовавший статью с целью привлечения внимания (к операторному понятию дифференциала.— *Л. К.*), высказал нам в частной беседе мнение о желательности ввести в функциональный анализ операторное определение дифференциала, основанное на тех же принципах, что и определение, данное Адамаром для функций классического анализа».

 Упомянуть математические рукописи Маркса — о чем,

собственно, и шла речь в статье Гливенко — французский математик, видимо, не посчитал необходимым...

7

Маркс не знал ничего о работах Огюста Коши, который положил начало строгой теории пределов и сумел, таким образом, найти обоснование математического анализа. Но даже если бы он был знаком с ними, вероятнее всего, что они его не удовлетворили бы. Ведь понятие предела не может быть уложено в рамки какого-нибудь алгоритма. Мысль Маркса двигалась иным путем, ему был нужен «реальный» процесс отыскания производной, то есть алгоритм, который во всех случаях позволяет во-первых, ответить на вопрос, есть ли у данной функции производная, а, во-вторых, дает способ найти ее, если она существует. Поэтому о производных, полученных с помощью Марксова метода «алгебраического дифференцирования», современный математик сказал бы, что они «построены конструктивно».

Как выяснилось много лет спустя, такая задача выполнима далеко не для всех функций. Но Маркс занимался как раз теми из них — аналитическими, то есть разложимыми в степенные ряды, которые позволяют совершить над собой эту процедуру. Именно они и явились объектом Марксова «алгебраического дифференцирования».

Сейчас класс таких функций значительно расширен— математики заставили их отвечать на оба вопроса алгоритма. И, таким образом, приблизились к построению математического анализа на твердой основе теории алгоритмов. Это направление научной мысли получило название «конструктивный математический анализ». Он появился только в самое последнее время. О причинах, вызвавших его к жизни, и о связи, которая существует

между этим новейшим направлением в современной математике и теми идеями, что содержатся в Марксовых математических работах, образно сказано в статье московского математика А. А. Рывкина, опубликованной в журнале «Природа» к стопятидесятилетию со дня рождения Маркса: «Возникновение математического анализа вызвало среди математиков продолжительное смятение. Его и по сей день испытывает каждый, кто ближе сталкивается с основаниями этой науки, претендующей на роль хранительницы логики. Получив в руки бесконечное как объект исследования, математики наводнили свою науку страшными призраками, среди которых функция, разрывная в каждой точке, считается вполне безобидным. Вот уже несколько столетий математики стремятся обосновать методы классического анализа, и чем более тонкое обоснование они находят, тем более ошеломляющие парадоксы появляются на горизонте. Кого не приведет в уныние известный парадокс теории множеств, утверждающий, что существует такое разбиение шара на части, которое позволяет из получившихся частей составить два точно таких же шара!

Конструктивное направление появилось в математике как мессия, обещающий спасение ценой жертв и воздержания. Математика должна была отказаться от рассмотрения бесконечных множеств в качестве непосредственного объекта исследования. Был отвергнут и закон исключения третьего, на котором основано доказательство от противного. В своем распоряжении конструктивисты оставили лишь те объекты, конструктивное построение которых потенциально осуществимо, то есть возможно в предположении, что нам дано достаточное количество времени, пространства и «строительного материала».

Стеснив себя столь жесткими рамками, они стремятся заново построить существующие математические теории, в том числе и математический анализ, который назван конструктивным анализом...

В настоящее время конструктивисты, среди которых много замечательных советских математиков (А. А. Марков, Н. А. Шанин, И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин), все настойчивее проникают в различные области математики, получая подчас исключительные по своей неожиданности результаты.

Сейчас представители конструктивного направления ведут непримиримую войну с теми, кто стоит на классических позициях. Конечно, мало кто из математиков верит, что они смогут «похоронить» классическую математику, основанную на идеях создателя теории множеств Георга Кантора. Однако оздоровительная ценность конструктивных идей, пожалуй, бесспорна. У этого направления большое будущее, и многие открытия грядущей математики должны появиться при его участии.

Сделанное сейчас отступление выполнило свою роль, если помогло за кажущейся наивностью метода «алгебраического дифференцирования» разглядеть отблеск глубокой идеи, которая в настоящее время завоевала прочное место в математике».

8

До сих пор речь шла о занятиях Маркса математикой ради нее самой, о его «чистом» интересе к этой науке. Что же касается «корыстного» расчета — выковать себе во время математических занятий могучее оружие, с которым можно штурмовать самые неприступные экономические крепости, то и здесь Маркс сумел заглянуть далеко вперед.

Конечно, Ковалевский не прав, когда пишет, будто Маркс возобновил свои занятия высшей математикой только для того, чтобы «сознательно отнестись к только что возникавшему тогда математическому направлению в политической экономии».

Несколькими страницами ранее Ковалевский в своих воспоминаниях пишет об исключительной, феноменальной научной добросовестности Маркса, о том, что он готов был проводить недели в библиотеке Британского музея, чтобы вызволить из небытия какого-нибудь второстепенного и малоизвестного ученого прошлых времен, если, по его представлению, этот ученый мог высказывать интересные мысли по вопросу, занимающему Маркса. Естественно, Маркс досконально знал и всю современную ему литературу по политэкономии. И, конечно, он не остановился бы перед тем, чтобы освоить высшую математику, если бы это потребовалось ему для «сознательного отношения» к трудам Джевонса. Но не творчество Джевонса подвигло Маркса на изучение высшей математики, а, наоборот, знакомство со многими разделами математики позволило ему ознакомиться с работами Джевонса.

Да и так ли уж нужно было Марксу знание математики, чтобы разобраться в том, что представляли собой работы Уильяма Стэнли Джевонса, профессора логики и политэкономии в Лондоне и Манчестере, который ввел в экономику математические методы, но выхолостил самую ее суть? Ведь Джевонс не видел, например, в чем же состоит роль труда в образовании капитала. С таким политэкономом можно было расправиться, и не углубляясь в бездны дифференциального и интегрального исчисления.

В 1888 году Энгельс писал в Петербург Николаю Францевичу Даниельсону, своему постоянному корреспонденту и первому переводчику «Капитала» на русский язык: «Вы удивляетесь, почему политическая экономия в Англии находится в таком жалком состоянии. Но то же самое мы видим теперь повсюду. Даже классическая политическая экономия, более того, даже самые вульгарные разносчики свободной торговли встречают презрение со стороны еще более вульгарных «высших» существ, занимающих ныне университетские кафедры политической

экономии. И в этом виноват в значительной степени наш автор (по цензурным соображениям Энгельс не называет имени Маркса, а всюду говорит о нем: наш автор.—*Л.К.*), который открыл людям глаза на опасные выводы классической политической экономии; вот они и находят теперь, что, по крайней мере в этой области, всего безопаснее не иметь совсем *никакой* науки. И им удалось до такой степени ослепить обыкновенных филистеров, что здесь, в Лондоне, в настоящее время имеется четыре человека, называющих себя «социалистами» и в то же время уверяющих, будто они совершенно опровергли нашего автора, противопоставив его учению теорию Стэнли Джевонса!»

В другом письме, адресованном Ф. Зорге, Энгельс пишет о почитателях Джевонса: «...благонамеренная банда, состоящая из «образованных» буржуа, которые опровергли Маркса с помощью гнилой вульгарной политической экономии Джевонса; она настолько вульгарна, что ее можно толковать как угодно, даже социалистически».

И в самом деле, на чем зиждилась экономическая философия Джевонса? Он был одним из авторов и ревнителей пользовавшейся одно время шумным успехом «теории предельной полезности» — той самой, которая усовершенствовала древнюю истину: «Чем полезнее вещь, тем она дороже», придав этому нехитрому тезису сугубо научный вид. Если у вас есть десять кусков хлеба, то всего дороже вам первый, а всего меньше цените вы последний, десятый кусок, утверждали творцы новой теории. Отсюда и ее название: предельная полезность, полезность «последнего куска». Джевонс, знаток логики и математики, не мог не увлечься экономической теорией, само название которой «предельная» ласкает слух человека, знакомого с бесконечно малыми величинами и пределами. Однако математика, придав трудам Джевон-

са академическую солидность, не могла, естественно, сделать их верными.

Маркс же слишком хорошо понимал суть математики как науки, чтобы ясно не сознавать, что это — жернов, который перемелет все, что на него ни положат. И потому в какие бы пышные математические одежды ни рядилась та или иная теория, выводы ее будут неизбежно ложными, если неверны исходные предпосылки.

Нет, не для сражения с джевонсами ковал он свое математическое копье. Его замах был куда шире и куда неожиданнее по мысли. Он хотел, как и сообщал Самюэлу Муру, «математически вывести... главные законы кризисов». Иными словами, построить математическую модель капиталистического хозяйства. Желание это родилось у него не сразу, не вдруг — оно вытекало из самого его подхода к экономике.

Количественной, математической стороне экономических явлений Маркс всегда уделял много внимания, охотно применяя математические символы и терминологию. Чрезвычайную роль он придавал тому, что нынче принято называть «экономико-математическими моделями».

Модель — это логическая, мысленная абстракция. Совокупность основных связей. Все второстепенное отброшено. Все существенное, первостепенное — на виду. Такая модель может выглядеть как система математических формул или как графическое построение. Графическую форму имели первые экономические модели Франсуа Кенэ. В середине восемнадцатого века он предложил свой знаменитый среди экономистов «зигзаг», а несколько лет спустя — сетку перекрещивающихся линий, отмечавших движение потоков материальных благ. И хоть модели эти внешне были совершенно непохожи, они изображали один и тот же процесс: простое воспроизводство общественного продукта и дохода общества.

Сто лет спустя Маркс, высоко оценивший методоло-

гическую находку Кенэ, но видевший ложность исходных посылок французского экономиста (тот считал рабочий класс непроизводительным классом, он называл его «бесплодным» и отсюда получил неправильную картину воспроизводства), построил свою модель простого и расширенного воспроизводства.

Самый первый вариант схемы простого воспроизводства Маркс дал взамен экономической таблицы Кенэ. Как о всяком новом своем открытии, он прежде всего написал об этом Энгельсу. В письме от 6 июля 1863 года Маркс помещает схему своей «экономической таблицы», а под ней чертит схему Кенэ.

Продолжая анализ и математическую обработку предложенной схемы, Маркс со временем оформляет ее в виде алгебраического уравнения — для простого воспроизводства и математического неравенства — для расширенного. Он дал и числовые примеры расширенного воспроизводства. Марксова модель на десятилетия вперед расчистила научное поле для тех, кого волновала в экономике количественная сторона явлений.

Развивая идеи Маркса, через десять лет после его смерти молодой Ленин в реферате «По поводу так называемого вопроса о рынках» дал свой вариант схемы воспроизводства, выполнив его в виде компактной таблицы. А в первые же годы Советской власти, когда выявилась необходимость сконструировать экономические модели для руководства плановым хозяйством страны, по инициативе Владимира Ильича правительство поручило Центральному статистическому управлению построить баланс народного хозяйства СССР на 1923/24 хозяйственный год. Такая задача ставилась в мире впервые. И впервые она была решена нашими экономистами, построившими точную и ясную модель по принципу турнирных таблиц, отражавшую межотраслевые связи в хозяйстве Советского Союза. Это — прообраз современных моделей планирования и анализа экономики сложного многоотраслевого

5 949

хозяйства. А незадолго до Великой Отечественной войны молодой ленинградский ученый, ныне академик Леонид Витальевич Канторович заложил основы самого мощного математического метода современной экономической науки — того самого, который спустя десятилетие получил название «линейного программирования».

Сегодня математические методы внедряются в теорию и практику экономики повсеместно.

Но того,что хотелось получить в экономике Марксу — вывести внутренние законы экономического развития в математичской форме, не удалось пока еще никому добиться и ныне.

Интермеццо третье

Математика дает наиболее чистое и непосредственное переживание истины.

Макс Лауэ

Она занимала номер на втором этаже гостиницы в Николаеве. Снизу, из ресторана, доносились пьяные голоса. Кухонный чад сочился сквозь стены.

Она подошла к окну. Редкие блики света падали на мостовую. Окна ресторана были плотно зашторены. Яновская усмехнулась: рекомендации генерала фон Бельца, командующего оккупационными частями в Одессе, пользовались успехом и в Николаеве. Это ему принадлежала идея занавешивать окна в ресторанах, чтобы голодающие не могли туда заглядывать. Истинно немецкое решение проблемы...

Звон шпор в коридоре, грохот сапог. В дверь соседнего номера стучат: «Проверка документов!» Под кроватью, в тюке, обернутом мешковиной, листовки, подпольные газеты, револьверы. Она вытаскивает тюк, ставит его посередине комнаты. Отбрасывает засов на дверях, зажигает лампу и ждет. Дверь распахивается от удара. Офицер пристально разглядывает крохотную женщину,

почти девочку, прижавшуюся к столу. Она едва достает ему до пояса. Кругленькое личико, острый носик.

«Документы!» Яновская медленно и тщательно разворачивает бумаги — документы у нее в порядке. Офицер стремительно проходит вперед, спотыкается о тюк и, выругавшись, отпихивает его в сторону. Заглядывает под кровать, отбрасывает матрац, выдвигает ящики стола. Уже в дверях он оборачивается и с презрительной, чуть брезгливой усмешкой — женщины появляются в этой гостинице лишь с определенной, ему хорошо известной целью — бросает: «Приятной ночи, мамзель...»

Как долго можно играть со смертью? Сколько месяцев, сколько дней, сколько раз на день? В прошлый раз она так же, как теперь, ехала связной одесского подпольного губкома. Ее арестовали еще в поезде. Офицер вошел в вагон на последней станции перед Николаевом. Сел на скамью напротив, улыбнулся, завел разговор. Спрашивал, куда и к кому едет, где остановится. С любопытством поглядывал на чемодан, вздувшийся от газет и брошюр. Она рассказала ему, что училась в Одессе на Высших женских курсах, увлекалась математикой. Поговорили о знакомых профессорах, о математических журналах. В Николаеве он сказал: «А теперь пройдемте со мной». В караульном помещении снял телефонную трубку: «Да, я арестовал ее. Нет, без очков...— он покосился на ее драповое пальто,— в тулупе. Не та? Слушаюсь!» И повесил трубку. «Вы можете передвигаться без очков?» — «Попробую».— «Спрячьте очки, снимите пальто и возьмите тулуп с вешалки, рукава закатите. Уходите с вокзала через багажное отделение».

Больше она его никогда не встречала...

Что сохраняет память спустя полвека? Пароль «засахаренные фисташки» (почему?), запах свежей типографской краски на оттисках подпольного «Коммуниста», отпечатанного в катакомбах, разнокалиберный шрифт (выкраден из различных наборных касс), отчего строки в газе-

те, казалось, подпрыгивают... В четыре часа ночи на пустынной одесской улице ее остановил патруль. Темно, где-то неподалеку стреляют. Она была уже в то время секретарем редакции «Коммуниста» и несла материалы очередного номера, вложенные в благонадежные «Одесские новости». Интересно, сколько раз ее должны были бы расстрелять, если за каждую листовку полагалась смертная казнь? На счастье, патруль интересовался только деньгами, а их у Яновской не было.

Восемнадцать контрразведок орудовали в Одессе. Восемнадцать контрразведок пытались отыскать редакцию газеты, каждую неделю расходившейся в пяти тысячах экземпляров. И каждую неделю маленькая женщина приходила на явочную квартиру — в молочную лавчонку на Нежинской улице, где в полутемной комнате хозяев собиралась редакция. Приходила, принося с собой выправленные материалы, собранные на заводах, сообщения, полученные с белогвардейских радиостанций, от железнодорожных телеграфистов, сочувствовавших большевикам. И уходила, унося с собой план нового номера.

А потом — фронт под Елисаветградом, чоновские отряды в Чернигове, работа в одесском губкоме партии. Осенью двадцать третьего года Яновскую командируют в Москву, в Институт красной профессуры, а через два года она уже руководит семинаром для студентов и аспирантов по методологии математики и естествознания, ведет в институте математические дисциплины.

Студенчество тех лет... Вчерашние школьники, привыкшие к тому, что все написанное в учебниках, изданных до революции, должно быть переделано, перевернуто, изменено. И выпускники рабфака, перед первой лекцией на рабфаке еще не знавшие, что земля — шар и кричавшие своему преподавателю: «Врешь, профессор!» У всех неукротимая, яростная жажда знаний, желание узнать все и сразу же, немедленно. И твердая уверенность,

что все трудности на свете — даже если это трудности постижения науки — от происков мировой буржуазии. Несогласие со всем, чему давность — десятилетие. И недоверие к профессорам, живым носителям этой давности, к их науке, к ее выводам и методам. Желание очистить науку от «буржуазной скверны», превратить ее в «пролетарскую» — у кого искреннее, а у кого и корыстное. В этом кипящем котле страстей Яновскую считали своей и профессора и студенты. И в том, что математикам Московского университета не пришлось пережить тягостных и бесплодных дискуссий, которые в те времена лихорадили почти все наши учебные заведения,— заслуга Софьи Александровны. Многие ныне прославленные математики, ее бывшие ученики и коллеги, до сих пор с благодарностью вспоминают об этом.

А два десятилетия спустя, в конце сороковых — начале пятидесятых годов, Яновская основала в Московском университете курс математической логики. В 1947 году появился перевод «Основ теоретической логики» Гильберта и Аккермана — первая монография такого рода, опубликованная у нас в стране. Книга была встречена в штыки многими философами. Одна только попытка сближения математики и философии вызвала яростные нападки и на редактора книги, и на автора вступительной статьи, и на составителя комментариев, а этим человеком, единым в трех лицах, была Софья Александровна. И тем не менее по ее настоянию на следующий год выходит новая книга из этой серии и потом в течение двух десятилетий книги и статьи, на которых воспитано нынешнее поколение наших специалистов в этой области. И в том, что в годы самых безудержных нападок на кибернетику нам удалось сохранить и развить советскую школу математической логики, — снова есть заслуга Софьи Александровны.

Глава IV.
«В НАДЛЕЖАЩИЕ РУКИ»

Книги имеют свою судьбу.
Теренциан Мавр

1

Судьбы рукописей еще более драматичны, чем судьбы книг. Архимедово «Послание Эратосфену» — не исключение, но оно все-таки подтверждает правило. Не избегли общей участи и «оставшиеся после Маркса рукописи по математике, имеющие в высшей степени важное значение», их путь к людям оказался непрост.

Намерениям Энгельса издать их вкупе со своими трудами последних лет не суждено было осуществиться — его «Диалектика природы», вместе с которой он собирался опубликовать Марксовы математические работы, увидела свет лишь через тридцать лет после смерти автора. Все это время она пролежала под спудом в архивах немецкой социал-демократии и впервые была издана только в 1925 году у нас в стране. Героические попытки Энгельса во что бы то ни стало отсрочить смерть до того мгновения, когда все оставленные ему в наследство великим другом и единомышленником работы увидят свет, отнюдь не удлинили его жизни. «Мое положение таково: 74 года, которые я начинаю чувствовать, и столько

работы, что ее хватило бы на двух сорокалетних,— писал он в декабре 1894 года.— Да, если бы я мог разделить самого себя на Ф. Энгельса 40 лет и Ф. Энгельса 34 лет, что вместе составило бы как раз 74 года, то все быстро пришло бы в порядок. Но при существующих обстоятельствах все, что я могу, это продолжать свою теперешнюю работу и работать возможно больше и возможно лучше».

Это намерение было высказано Энгельсом всего за несколько месяцев до смерти. В августе 1895 года его не стало, а еще через три года ушла из жизни Элеонора Маркс-Эвелинг, младшая дочь Маркса, которой по завещанию Энгельса переходили все бумаги, все рукописи и письма ее отца, кроме писем, адресованных лично ему, Энгельсу. Лишь часть этого драгоценного наследия довелось сделать достоянием всех людей ее старшей сестре Лауре. И бесчисленные ящики, пакеты, свертки с чердака на Мейтленд-парк-род, так и не дождавшись ни чутких и внимательных Энгельсовых рук, ни заботливых рук дочерей Маркса, попали в конце концов, как и оставшиеся после Энгельса рукописи, в архив немецкой социал-демократии, который был создан по инициативе Августа Бебеля в Цюрихе за год до смерти Маркса. Ее лидеры только и ждали смерти верных друзей и единомышленников Маркса—живые, они насмерть стояли на их пути, защищая дело своей и Марксовой жизни. Естественно, ни Эдуард Бернштейн, ни Карл Каутский, ни кто другой из тех, кто жаждал заключить противоестественный брак — соединить марксизм со слегка подправленной философией Канта и Маха,— отнюдь не спешили распаковывать доставшиеся им сокровища. И уж, разумеется, Шейдеман и К°, эта «продажная и бесхарактерная банда лакеев капитала», как назвал ее Ленин в «Письме к немецким коммунистам» в августе 1921 года, и в мыслях не держала издавать оставшиеся после Маркса неопубликованные рукописи.

Забот и нужд у нас в те далекие двадцатые годы было немало — самых острых, самых неотложных. И все-таки в самом начале 1921 года Ленин пишет Давиду Борисовичу Рязанову, одному из организаторов Института К. Маркса и Ф. Энгельса, а в то время первому его директору:

«т. Рязанов! Есть ли у Вас в библиотеке *коллекция* всех писем Маркса и Энгельса *из газет*? и из отдельных журналов?

...Есть ли *каталог всех писем* Маркса и Энгельса? Нельзя ли мне его взглянуть на недельку, т. е. *каталог*?»

Второго февраля этого же трудного и голодного года Ленин пишет ему еще одну записку:

«т. Рязанов!

Большая просьба:...

1) Не знаете ли, *откуда* взяты *подчеркнутые места* из писем Энгельса?

2) Было ли и *где* это напечатано полностью?

3) Если было, нельзя ли найти и получить?

4) Нельзя ли нам *купить* у Шейдеманов и К° (ведь это продажная сволочь) письма Маркса и Энгельса? или купить снимки?

5) Есть ли надежда собрать нам в Москве все опубликованное Марксом и Энгельсом?

6) Есть ли каталог *уже собранного здесь*?

7) Письма Маркса и Энгельса собираем мы (или копии), или это не осуществимо?»

Короткая записка из семи пунктов, за каждым из которых стоит забота о том, чтобы ничего из написанного рукой Маркса и Энгельса не пропало для подлинной наследницы их творчества — революционной России и, таким образом, для всего человечества. Ради того чтобы спасти эти драгоценные строчки, не жалко было ни сил, ни времени, ни денег, хотя всего этого так остро не хва-

тало и хотя было совсем неясно, сколько может запросить Шейдеман и К°. С этого ленинского письма и ведет свою историю ныне известный во всем мире фонд № 1 — под этим номером в Центральном партийном архиве Института марксизма-ленинизма при ЦК КПСС значится самое полное в мире собрание трудов Маркса и Энгельса, их собственных писем и писем к ним других людей, воспоминаний товарищей по борьбе и работе, материалов из архивов тайной полиции и всех иных документов об их жизни и деятельности. Собрано в этом фонде и множество книг, журналов, газет, которыми пользовались Маркс и Энгельс, редкие прижизненные издания их произведений — все это приобретено в разное время институтом и занесено в соответствующую опись. Но самое большое богатство — это содержимое описи № 1. В комнатах-«сейфах», всегда при одной и той же температуре 16—17 градусов, круглый год при одинаковой влажности воздуха — 60—70 процентов, тщательно оберегаются от разрушительного воздействия времени около семи тысяч рукописей Маркса и Энгельса или, если нет оригинала, их фотокопий. Каждый листок лежит в особой — двойной, даже тройной — папке, каждый лист рукописи переложен папиросной бумагой.

Но тогда, в феврале 1921 года, только что созданный Институт Маркса и Энгельса весь помещался в шести комнатах на углу Воздвиженки и Шереметьевского переулка, а все рукописи, которыми он обладал,— восемь писем Маркса к Руге, полученные от дочери Маркса Лауры Лафарг. К тому, чтобы приобрести другие документы, а уж особенно неопубликованные рукописи, путей в то время еще не было найдено, и Владимир Ильич особое внимание уделяет изданию для массового читателя самой малоизвестной, хотя и опубликованной уже части произведений великих друзей — их эпистолярного наследия. За это нелегкое дело по поручению Ленина взялся Владимир Викторович Адоратский, бывший в то время

заместителем заведующего Центральным архивным управлением (впоследствии он стал директором ИМЭЛа, затем директором Института философии Академии наук). Он собрал многие из тех писем Маркса и Энгельса, которые были к тому времени у нас опубликованы, но, конечно, мечтал о том, чтобы собрать их все. И когда несколько месяцев спустя Рязанов отправляется, наконец, в Германию, Ленин посылает ему в Берлин письмо, как всегда короткое и энергичное:

«т. Рязанов! Я *очень* поддерживаю просьбу т. Адоратского, который проделал работу немалую и полезную. Собрать *все* письма Маркса и Энгельса важно, и Вы это сделаете лучше других».

Просьба В. В. Адоратского, переданная Владимиром Ильичем Д. Б. Рязанову, заключалась в том, чтобы собрать в Германии все опубликованные там письма Маркса и Энгельса не только в книжных изданиях, но и в периодической печати. Она была выполнена, и в 1922 году у нас на книжных полках появился сборник «Письма. Теория и политика в переписке Маркса и Энгельса», в котором перевод, комментарии и вступительная статья принадлежали перу Адоратского.

Рязанов же сумел выполнить и высказанное ранее пожелание Ленина «собрать нам в Москве все опубликованное Марксом и Энгельсом». Давид Борисович, который еще до революции изучал рукописное наследие двух великих друзей, летом 1923 года вновь отправился в Берлин, где находился в то время архив германской социал-демократии. Он развил кипучую деятельность, проводя в жизнь программу собирания всех документов, связанных с Марксом и Энгельсом, программу, начертанную ленинской рукой. Пользуясь своими давнишними личными связями с руководителями германской социал-демократии, он сумел договориться о том, чтобы получить на известных условиях право перефотографировать рукописи из Берлинского архива, а сам этот архив Рязанов

успел изучить вдоль и поперек, проводя в нем бесчисленные часы в годы эмиграции.

О том, что добиться такого права было непросто, свидетельствует, например, цитата из статьи, опубликованной в 1965 году в западногерманской газете «Süddeutsche Zeitung»: «После первой мировой войны, когда посланцы Москвы разыскивали рукописи своих идеологических вождей, СДПГ[1] с ожесточением держалась за это сокровище». Понятно, что едва вырвав согласие на свою работу, Рязанов сразу взялся за дело, и осенью того же года первая партия фотокопий была уже в Москве, в бывшем особняке князей Долгоруких в Малом Знаменском переулке (который стал теперь улицей Маркса—Энгельса), куда к тому времени перебрался институт. На следующий год Рязанов снова едет в Германию и снова дни и ночи напролет проводит в архиве. Германские социал-демократы навели в нем страшный беспорядок, и работать Рязанову было чрезвычайно трудно. Но именно этот беспорядок принес ему радость, даже счастье — человек, привыкший по листочкам собирать подлинные документы Маркса и Энгельса, увидел вдруг в архивной пыли и сумятице никому не известные ранее рукописи Маркса, сотни его и Энгельса писем, нигде, никогда и никем не опубликованные! Конечно, Рязанову не терпелось поскорее привезти эти сокровища в Москву, а уж там только насладиться своей удачей. Но перефотографировать несколько десятков тысяч листов — по тем временам это было сложной задачей. И главная трудность была даже не в денежном недостатке—несмотря на тогдашнюю нашу нищету, Советская республика дала на собирание наследства основоположников научного коммунизма достаточно средств. Однако съемка, проявление, печать — все это было в двадцатые годы делом сложным и, главное,

[1] СДПГ — социал-демократическая партия Германии.

долгим. Рязанов раздобыл несколько фотостатов — последнюю новинку фотографического дела тех лет, которые снимали копию не на пластину-негатив, а сразу на специальную бумагу, правда, текст на них получался белым на черном фоне. Нанял трех немцев — больших специалистов в этом деле, организовал во Франкфурте-на-Майне, при Институте социальных исследований, специальную лабораторию. Дело закипело...

Сам же Рязанов со свойственной ему энергией занялся скрупулезным изучением архивных материалов. В этом была его подлинная страсть, недаром товарищи прозвали его «Буквоедом». Человек сложного характера, соединявший в себе массу противоречий, из-за чего его политическая позиция часто оказывалась шаткой, он не раз вступал в резкое столкновение с линией партии.

В начале 1918 года он выходил из ее рядов, не будучи согласен с ленинской позицией в вопросе о Брестском мире. Позже, во время так называемой профсоюзной дискуссии, он также проводил антипартийную линию и в 1931 году был исключен из ВКП(б). Но если кипучая энергия Рязанова была направлена в правильное русло, она всегда приносила реальную пользу — как тогда, в начале двадцатых годов, когда он работал в Берлинском архиве, стремясь составить возможно полную опись материалов. И вот, приводя в порядок крайне запущенное архивное хозяйство, он обнаружил, что многих рукописей в архиве недостает.

Энгельс передал все свои бумаги и все авторские права на издание своих произведений социал-демократической партии Германии — по самому духу своего завещания. Но по букве его все это переходило к Августу Бебелю и Эдуарду Бернштейну, потому что по существовавшим тогда в Англии законам имущество можно было завещать только частным лицам. И вот Бернштейн, пользуясь своим положением литературного душеприказчика Эн-

гельса, оставил у себя часть рукописей — его и Маркса. Рязанов, проводя описание и систематизацию рукописного наследства Маркса и Энгельса в Берлинском архиве, обнаружил это и сумел вынудить Бернштейна после ряда проволочек сдать утаенные им бумаги. Среди них оказалась и часть математических рукописей Маркса.

Однако Рязанову не нужно было перебирать архивные описи, чтобы заметить еще один существенный пробел. Он прекрасно знал, что еще одна — и немалая — часть рукописей в архиве отсутствует. Да и как ему было не знать об этом, ведь именно он, Рязанов, много лет назад, будучи еще эмигрантом и работая над изучением наследия Маркса и Энгельса, получил от Бернштейна немало бумаг, написанных ими. Возвращаясь после февраля семнадцатого года в Россию, Рязанов оставил драгоценные рукописи на хранение Фридриху Адлеру, одному из лидеров австрийской социал-демократии. Адлер, за год до того застреливший австрийского премьер-министра графа Штюргке, после революции 1918 года в Австрии открыто перешел в лагерь реакции и отнюдь не спешил возвращать нежданно попавшее ему в руки богатство пусть и не слишком законным, но все-таки хозяевам.

Институт Маркса—Энгельса потребовал, чтобы Адлер немедленно передал бумаги в Берлинский архив. Только через полгода ящик с материалами, присвоенными Адлером, был доставлен, наконец, на место. В нем, среди прочих манускриптов, были упакованы и 10 тетрадей с математическими рукописями Маркса. Все вновь полученные документы были, разумеется, тотчас же перефотографированы: пополняя Берлинский архив, Институт Маркса—Энгельса стремился, прежде всего, выполнить ленинское указание о сосредоточении в Москве, хотя бы в виде фотокопий, всего, что было когда-нибудь написано Марксом и Энгельсом.

 Бесценные фотокопии неопубликованных материалов

очень скоро,— а по тем временам необыкновенно скоро,— были доставлены в Москву.

Около тысячи страниц из них составили математические работы Маркса.

3

В Институте Маркса—Энгельса фотокопии математических рукописей появились в 1925 году и заняли свое место в описи № 1 фонда № 1.

Первым за них взялся Э. Гумбель, немецкий математик, еще в Германии работавший с этими рукописями. За два года он сильно запутал дело. Конечно, у него были извиняющие обстоятельства. Номера на листках фотокопий ставились кое-как. Да плюс сюда Марксов почерк, когда цифры «4» и «7» похожи, как родные сестры, а «5» и «8» — как близнецы, и когда нумерация страниц весьма нередко имеет такой вид: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 5, 6, 7, 8, 6, 7, 5, 6. Почерк, который мог в совершенстве понимать разве что один только Энгельс. «Мое зрение было бы полностью загублено прежде, чем я сделал бы половину работы,— писал он незадолго до смерти Лауре Лафарг, рассказывая ей о своих отчаянных попытках успеть подготовить к печати оставшиеся после Маркса неопубликованные рукописи.— Я убедился в этом много лет тому назад и попытался найти другой выход: решил, что было бы хорошо, если бы один или два толковых представителя младшего поколения научились читать почерк Мавра».

Кроме невероятно сложного почерка и более чем своеобразной системы нумерации страниц, было и еще одно весьма характерное для Маркса обстоятельство, очень затруднившее впоследствии чтение и расшифровку его неопубликованных рукописей: привычка Маркса не раз, не два и не пять возвращаться к одному и тому же вопросу, пока он не становился кристально ясным — все это Гумбелю вполне могло показаться неинтересным. И по-

тому, хотя расшифрованы рукописи довольно добросовестно (кроме Гумбеля этим нелегким делом занимались Богдань и позже Вильдгабер), в самом подборе материала для расшифровки не было ни системы, ни порядка.

В сущности, «приводя в порядок» математические манускрипты, никто не имел ни малейшего представления, в чем смысл этих работ. И потому в «Летописях марксизма» за 1927 год — а это первое упоминание о Марксовых математических рукописях — появились следующие удивительные строки: «Те рукописи, которые не содержат вычислений или выдержек, можно считать самостоятельными работами Маркса. Только их имеет смысл издать. Они содержат вольное изложение прочитанного Марксом, соединенное с многочисленными хронологическими датами, и философские размышления над прочитанным; в некоторых случаях Маркс ставит проблемы особым способом, свойственным только ему».

Разумеется, при таком подходе к делу трудно было рассчитывать на успех. И действительно, ключевая работа — «Исторический очерк» — была причислена к «выдержкам из различных авторов, так как способы обозначений меняются». А ведь в ней нет ни одной выдержки, а меняются способы обозначений только из-за того, что речь идет о различных этапах в развитии дифференциального исчисления! И, наоборот, в самостоятельные работы попало немалое число явных конспектов, например, те листы, что относятся к расходящимся рядам. Особенно не повезло при «упорядочивании» записям Маркса о теоремах Тейлора и Маклорена, где нередко одна страница при расшифровке относилась к одной работе, а ее непосредственное продолжение — к другой.

В таком виде математические рукописи Маркса находились до начала тридцатых годов, когда в институте стал работать Эрнст Кольман. Фотокопии математических

работ Маркса привлекли его внимание, и он убедил Софью Александровну Яновскую, которую знал по работе в Коммунистической академии, заняться этими рукописями. Произошло это так.

4

Приближалась знаменательная дата — полвека со дня смерти Маркса. Институт Маркса—Энгельса—Ленина готовился к этому дню, и, естественно, математические рукописи оказались в фокусе его внимания. Коммунистическая академия находилась в то время по соседству с институтом. Там работала Софья Александровна Яновская. Соседство это оказалось счастливым — и для ИМЭЛа, и для Софьи Александровны, и для самих рукописей.

Вряд ли можно представить себе человека, который лучше, чем Яновская, подходил бы для такого трудного дела, как подготовка Марксовых рукописей к печати. Ее настойчивость и упорство вошли в фольклор Московского университета. Но, разумеется, одних лишь настойчивости и упорства тут было явно недостаточно. Требовалось уникальное соединение знаний, интереса и умений. Конечно, надо было знать математику. Потом — историю математики. Затем — языки: немецкий, английский, французский. Далее — суметь отделить конспекты от собственных Марксовых работ, а для этого надо было найти те книги, что он изучал, работая над своими математическими манускриптами. И что самое главное — проникнуться логикой Марксовой мысли, а об этом нельзя было и думать, не зная его трудов и переписки.

Если бы, однако, дело шло только о подготовке рукописей к печати... Нет, их надо было воссоздавать наново. Нужно было понять, что же Маркс хотел сделать и что он сделал, как развивались и трансформировались его идеи. Если угодно, нужно было на какое-то время

перевоплотиться в Маркса, научиться думать его мыслями и говорить его языком.

Яновская была внутренне готова к этому. Ей повезло: в гимназии ее учил И. Ю. Тимченко, известный в то время знаток истории математики, а на Высших женских курсах — С. О. Шатуновский, которого в математике больше всего волновало, как и чем обоснованы ее основные положения. И в те же годы в подпольных кружках она познакомилась с трудами Гегеля и Маркса и почувствовала силу диалектики — научного метода, словно специально созданного для людей, глядящих на мир глазами математика.

Вот такой читатель и комментатор оказался у Маркса. Они были по-настоящему единомышленниками — единство мыслей гарантировалось общими интересами и общим подходом к науке.

Софья Александровна и два ее аспиранта — Дмитрий Абрамович Райков и Анна Ионнасовна Нахимовская взялись за этот гигантский труд. В духе того времени они называли себя «бригадой». Прошло только два года, и в журнале «Под знаменем марксизма» появились результаты их работы — размышления Маркса над сущностью дифференциального исчисления, которые он изложил Энгельсу в 1881 году, и подготовительный материал к ним. В том же 1933 году вышел сборник «Марксизм и естествознание» (его редактировал В. В. Адоратский, сменивший к тому времени Д. Б. Рязанова на посту директора ИМЭЛа), где была перепечатана эта первая и единственная до самого последнего времени публикация самых важных частей из математических рукописей Маркса. Разумеется, текст был на русском языке.

«Перевод рукописей представил довольно значительные трудности,— писала в послесловии к этой публикации Софья Александровна Яновская.— Раньше всего оказалось очень трудно передать язык Маркса, насыщенный

 образами и сравнениями, игрой слов, новыми словообра-

зованиями и словоупотреблениями, переплетением трех основных языков. (И где, вдобавок, в основном, немецком, языке чередуются латинские и готические буквы. — *Л. К.*). Тут и «выступающая предводителем других членов» производная, и «обремененный множителем» коэффициент, и «беременная» приращением переменная величина, и совершающий «нисхождение в ад через нуль» дифференциал, и «дифференциальный коэффициент, как тень без тела, которое отбрасывает ее»... и такое слово, как «wegescamotieren» (найдите в словаре!)... и такие фразы, которые состоят из трех слов, из которых одно — немецкое, другое — английское, а третье — французское.

Особенно труден был перевод тех работ Маркса, которые, как исторический обзор, например, имеются лишь в черновом наброске. Записывая мысли в момент их зарождения, Маркс, естественно, не думал еще о форме. В таких работах попадаются поэтому и фразы без подлежащего или сказуемого и длиннейшие периоды, в которых очень трудно выделить главное предложение».

И в самом деле легко ли было понять и перевести высказывание о том, что Ньютон «ставит над приращениями штамп дифференциалов»? Или прорваться сквозь эмоциональный строй Марксовых фраз, где бушуют страсти, где сарказм («это дитя [выражения] $\frac{0}{0}$... выглядит подозрительнее, чем его мать») соседствует с трагизмом («Мы вращались в порочном кругу и снова пришли к нашему исходному пункту»). А сколько сил ушло на расшифровку характерной для Марксова стиля фразы «...steht es nicht ganz kauscher»! «Дело обстоит не вполне...»—что? И действительно — что такое «kauscher»? Первая мысль — а, может быть, Маркс все-таки успел проглядеть работы Огюста Коши? По-французски его фамилия пишется Cauchy и, учиты-

вая почерк Маркса, мысль о сходстве в написании этих двух слов казалась вполне разумной. Ведь на первой странице очерка «Об истории дифференциального исчисления», среди работ, которые он наметил себе прочесть, есть запись: «*Муаньо*, «*Лекции по дифференциальному и интегральному исчислению*». А Муаньо — ученик Коши. Как соблазнительно перевести загадочное слово притяжательным прилагательным от фамилии создателя теории пределов: «Дело обстоит не вполне в духе Коши»! И только изрядно поломав головы, «бригада» сообразила, что Маркс не был удовлетворен строгостью мысли английского математика Джона Хайнда, по учебнику которого он постигал в это время тонкости дифференциального исчисления, и для выражения своего неудовольствия употребил слово «кошерный», которым правоверные евреи называют «чистую» пищу в отличие от «нечистой», трефной. Маркс хотел, очевидно, подчеркнуть таким образом, что аргументы Хайнда не выдерживают критики даже с той точки зрения, которой тот сам придерживался в своих «Принципах дифференциального исчисления». Итак, «дело обстоит не вполне кошерно», рассуждения Хайнда, так сказать, «трефные».

Сколько же таких головоломок на тысяче страниц математических рукописей! И снова — «почерк, который могу читать только *я*, да и то с трудом»,— как жаловался однажды Энгельс в письме к Августу Бебелю, объясняя, почему он не может воспользоваться ничьей помощью, разбирая Марксово наследство. «...*Я — единственный из оставшихся в живых*, кто в состоянии расшифровать этот почерк и разобрать эти сокращения слов и целых фраз»,— писал он несколько позже Петру Лавровичу Лаврову, не предполагая, что время внесет коррективы в это его проникнутое горечью высказывание...

Однако переводчикам и комментаторам Марксовых математических работ, кроме незаурядных лигвистических, математических, философских и даже чуть ли не

криптологических талантов, нужно было обладать еще одним даром, относящимся уже не столько к свойствам ума, сколько характера.

Им необходима была смелость.

«Маркс имел возможность заниматься математикой либо в порядке отдыха от основной работы, либо когда был болен и не мог заниматься работой над «Капиталом». Оба последних обстоятельства обусловили ряд ошибок в рукописях, начиная от нумерации страниц и простых описок и кончая ошибками иногда и более серьезного характера»,— так от лица «участников бригады ИМЭЛ по математическим рукописям Маркса» писала С. Яновская в послесловии к публикации и продолжала: «Случайные ошибки в вычислениях мы просто исправляли, более существенные описки оговаривали в примечаниях».

Но так ли просто определить, ошиблась ли рука Маркса, не поспев за мыслью, или слово, возникшее в скорописи черновика, таит глубокий смысл, просто еще не прояснившийся для читателей рукописи? Всегда трудно готовить к печати черновики человека, ушедшего из жизни: никто с абсолютной достоверностью не растолкует непонятный абзац, не подтвердит — здесь недоразумение, описка. Но «править» Маркса — дело особой сложности, и не потому только, что это Маркс — титан, гений, авторитет которого безграничен, но и потому, что сам нетривиальный склад его мышления, умение видеть вещи по-новому, в непривычном ракурсе, его любовь к парадоксам ставят перед издателем Марксовых рукописей невероятные трудности.

Пример из области, которая, по выражению «бригады ИМЭЛ», была, в отличие от занятий математикой, «основной работой» Маркса — из экономики, где взгляды его (снова не в пример математике!) были изложены фундаментально, со всей свойственной Марксу основательностью, причем в главной своей части опубликованы либо

им самим, либо Энгельсом, этот пример ярко демонстрирует суть сказанного.

...В 1960 году вышел в свет первый том «Капитала» в новом русском переводе, подготовленном сотрудниками ИМЛа под руководством А. И. Малыша. Во всех предыдущих изданиях тома, как в тех, что вышли при жизни Маркса, так и в тех, что после его смерти появились чуть ли не на всех языках мира, в главе третьей было написано, что из закона обращения средств платежа вытекает: «масса средств платежа... находится в обратном отношении к продолжительности платежных периодов». Маркс сохранил эту фразу неизменной и при переизданиях «Капитала». Не заметил здесь ничего предосудительного и Энгельс, который внимательнейшим образом отредактировал четвертое немецкое издание, вышедшее в свет в 1890 году и с тех пор принимаемое всеми переводчиками за основу. И тем не менее подготовители тома были убеждены: здесь у Маркса описка — не в обратном, а в прямом отношении находится масса средств платежа к продолжительности платежных периодов. И это тем более очевидно, что сам Маркс ссылается на Уильяма Петти, родоначальника английской буржуазной политэкономии, установившего как раз такую прямую зависимость.

Итак, в издании 1960 года появилось примечание: «У Маркса здесь, по-видимому, описка». И тут же журнал «Вопросы экономики» публикует статью, в которой экономист З. Атлас оспаривает правомерность этого примечания и утверждает, что никакой описки у Маркса тут нет. Разгорелась целая научная дискуссия, в которой приняли участие экономисты Советского Союза и ГДР. В результате этой баталии мнение А. И. Малыша и его группы восторжествовало, и при переиздании «Капитала» в ГДР описка Маркса была устранена уже безо всякого примечания.

И такой спор развернулся вокруг фразы из «Капитала», да еще из первого его тома, где едва ли не каждое

слово Маркса обсуждено и прокомментировано поколениями исследователей! Что уж тут говорить о математических манускриптах...

И все-таки в срок, к пятидесятилетию со дня смерти Маркса, журнал с переводом его математических рукописей был подписан к печати. Он вышел тиражом тридцать пять тысяч экземпляров, и сейчас к нему едва ли применимо выражение «библиографическая редкость», у букинистов его давно уже нет.

5

Публикация эта, хотя она и не была полной, имела огромное значение. Она не только открыла вдруг совершенно новую, дотоле не известную сторону научных интересов Маркса, но послужила «непосредственным толчком к изучению взглядов Маркса на развитие естественных наук». Такая оценка, данная ей в книге, выпущенной ИМЛом в 1969 году,— отнюдь не преувеличение. Ведь «Диалектика природы», написанная Энгельсом под сильным влиянием Марксовых идей,— книга, целиком посвященная задаче проследить, как законы диалектики действуют в различных областях естествознания, впервые появилась на полках всего за несколько лет до этого. Бернштейн никак не хотел допустить, чтобы рукопись ее добралась, наконец, до типографии, ведь сам дух ее противоречил исповедуемой им философии неокантианства и махизма, паразитирующей на математике и естествознании. Под давлением Бернштейна рукопись этой и сегодня злободневной книги была официально признана германской социал-демократической партией устаревшей и непригодной для печати. Для этого было даже подготовлено специальное заключение, составленное членом этой партии физиком Лео Аронсом. Но в 1924 году Бернштейна все-таки заставили направить ее Альберту Эйн-

штейну, чей авторитет в науке был, конечно, несравненно выше, чем у партийного физика, столь скорого на расправу с умершим гением. И хотя Бернштейн и тут сжульничал — отправил не всю рукопись, а лишь часть ее, Эйнштейн определенно высказался за безотлагательную публикацию. «Диалектика природы» вышла в свет уже в 1925 году в московском журнале «Архив К. Маркса и Ф. Энгельса» сразу на русском и немецком языках. С той поры взгляды Энгельса на законы, действующие во всем естествознании, стали хорошо известны. Тому, конечно, способствовало и подстегнутое появлением его новой книги усиленное изучение «Анти-Дюринга». Но то, как глубоко интересовался этими же вопросами Маркс, оставалось неизвестным до первой публикации его математических работ.

Сразу же после появления ее в журнале «Под знаменем марксизма», в разных журналах и сборниках вышло несколько статей, специально посвященных анализу взглядов Маркса на математику: А. Холщевникова в «Фронте науки и техники», В. Гливенко — в том же журнале, где были напечатаны сами Марксовы работы. Но самой глубокой была статья Софьи Александровны Яновской, послужившая послесловием к опубликованным математическим манускриптам Маркса.

В этой обширной работе, написанной со всем свойственным Софье Александровне блеском, есть такие слова:

«Энгельс недаром хотел издать математические рукописи Маркса вместе со своими работами по диалектике природы. Обе работы действительно дополняют друг друга. И можно смело сказать, что публикуемые Институтом Маркса—Энгельса—Ленина математические работы Маркса будут иметь для наших математиков-марксистов не меньшее значение, чем «Диалектика природы» для всего естественнонаучного фронта вообще.

Не только для математиков однако. Математические рукописи Маркса демонстрируют еще на одном приме-

ре метод Маркса — материалистическую диалектику — в действии. Они должны поэтому подвергнуться основательному изучению со стороны философов».

Подчеркивая огромное методологическое значение рукописей Маркса по математике, Яновская приводила слова Ленина о том, что «продолжение дела Гегеля и Маркса должно состоять в диалектической обработке истории человеческой мысли, науки и техники». Она писала: «Математические рукописи Маркса впервые дают нам цельную, законченную и систематическую картину диалектики исторического хода развития некоторой, столь отличной от обществознания, дисциплины, какой является дифференциальное исчисление. Подобного по глубине, по умению обнаружить корни различия и тождества различных исторически имевших место подходов к основным понятиям науки еще не существовало в истории математики и естествознания. Математические работы Маркса должны поэтому служить для наших математиков и естественников-марксистов образцом той работы над историей науки, о которой пишет Ленин».

Этот первый научный анализ значения математических работ Маркса Яновская заключила такими словами: «Маркс не был математиком-специалистом, но он основательно изучал математику и был вооружен методом материалистической диалектики, открывавшим перед ним такие перспективы в математике, которых не могли заметить и математики-специалисты. Через 50 лет после смерти Маркса его математические рукописи могут служить поэтому предметом изучения, образцом применения материалистической диалектики и стимулом для дальнейшей работы на новом, более широком современном основании».

Слова эти, написанные в 1933 году, и сегодня звучат так же современно, как и тогда.

В том же юбилейном 1933 году на X Международном математическом конгрессе в Цюрихе Кольман выступил с сообщением о математических работах Маркса.

В течение последующих лет никаких заметных событий, связанных с математическим архивом Маркса, не происходило. Правда, Софья Александровна неизменно рассказывала о нем в своих лекциях и докладах. «На кафедре математики читала в то время лекции профессор Яновская, а мы бегали слушать ее и пьянели от изложения математических тетрадей Маркса, где Маркс бросил мысль о «ноле», как не о ноле, потому что если б ноль был только ноль, от него был бы невозможен переход к единице». Это отнюдь не строгое, а лишь поэтическое изложение сути Марксовых математических работ принадлежит Мариэтте Шагинян — в другом юбилейном году, когда исполнилось 150 лет со дня рождения Маркса, она вспомнила о своей учебе в Плановой академии в тридцатые годы.

Случались и курьезные истории. Однажды на кафедру истории математики МГУ к Софье Александровне Яновской явился запыхавшийся студент-философ и, страшно волнуясь и горячась, стал требовать, чтобы все преподавание математики в стране было немедленно перестроено «в духе указаний Маркса». Софья Александровна, человек мягкой души, ласково поговорила с реформатором. Выяснилось, что он принял за Марксовы слова конспекты из Бушарла и Хайнда...

А потом вдруг произошло нечто и забавное и одновременно грустное, что сдвинуло дело с мертвой точки. В Венгрии в 1950 году был математический конгресс. Советская делегация на нем была весьма представительной: академик Колмогоров, академик Виноградов, академик Александров... И еще в нее входил молодой кандидат наук Рыбников. Он работал тогда в Центральном

Комитете партии, в отделе науки. И вот в Будапеште математики буквально всех социалистических стран «навалились» на наших ученых: когда, наконец, будут полностью опубликованы математические рукописи Маркса? Академики кивали на Рыбникова: он-де все знает. Но и Рыбникову сказать было нечего.

Вернувшись в Москву, он сразу же доложил о случившемся конфузе. «Но ведь вы математик?» — спросили его товарищи по работе. «Да», — ответил Рыбников, еще не понимая, в какую сторону клонился разговор. «Вот вы и займитесь математическими рукописями Карла Маркса».— «Но ведь на это нужны годы!» — «Значит, и работайте годы».

Так у Софьи Александровны Яновской появился докторант Константин Алексеевич Рыбников. (Они, впрочем, были старыми знакомыми, именно под руководством Софьи Александровны Рыбников защитил свою кандидатскую диссертацию — это было в 1941 году, на пятый день войны).

7

Свою докторскую диссертацию, посвященную математическому наследию Маркса, по странному совпадению Рыбников защитил ровно через тринадцать лет после кандидатской — 25 июня 1954 года. Интерес к ней был большой, он подогревался еще и тем, что за месяц до защиты Константин Алексеевич выступил с докладом о своих изысканиях и выводах на заседании Московского математического общества. Оппонентами его диссертации выступили такие известные ученые, как А. О. Гельфонд и А. П. Юшкевич. Академик Колмогоров прислал положительный отзыв. Но тем не менее от публикации самих рукописей Маркса решено было пока воздержаться — в них оставались еще неясные места.

Следующее десятилетие было заполнено трудом кропотливым и не броским: один за другим снимались вопросы, стоящие на полях рукописей. Надо было до конца выяснить, какими именно источниками пользовался Маркс, а это порой казалось невыполнимой задачей — книги эти давно вышли из употребления. В 1966 году Константин Алексеевич отправился в Лондон, как он выразился, «ловить льва в пустыне». Детальнейшим образом изучил он библиотечные фонды Британского музея, Лондонского и Кембриджского университетов, Университетского колледжа Лондона, колледжей Тринити и Сент-Джонса в Кембридже, Лондонского Королевского общества, а также личные библиотеки крупных английских ученых XIX века — де-Моргана и Грейвза. Запросы были посланы и в другие библиотеки, например, в колледж Сент-Катарина. Немецкий математик Вуссинг обследовал библиотечные фонды ГДР, стремясь найти в них все математические книги, изданные в Германии, которыми мог пользоваться Маркс. Так удалось почти во всех случаях сличить Марксовы рукописи с использованной им литературой и отделить, таким образом, его самостоятельные записи от конспектов.

Но была и еще одна сложность: в свое время в спешке были сфотографированы не все листы. Когда в августе 1964 года советская делегация была в Институте социальной истории в Амстердаме, где хранится большое число оригиналов рукописей Маркса, Ольга Константиновна Сенекина, заведующая секцией документов Маркса и Энгельса ИМЛа, сумела получить фотокопии недостающих страниц, которые Рязанов в спешке пропустил.

Дело, таким образом, хоть и медленно, но двигалось. В Большой Советской Энциклопедии появилась статья Рыбникова о математических рукописях Маркса. В написанном им учебнике истории математики есть глава, посвященная этим работам. В 1947 году в Тбилиси появилась работа Л. П. Гокиели «Математические рукописи

Карла Маркса и вопросы обоснования математики». В 1963 году вышла даже целая книжка «Карл Маркс и некоторые проблемы математики» Святослава Славкова, правда, не у нас, а в Болгарии и, естественно, не на русском, а на болгарском языке. Софья Александровна Яновская смогла, наконец, передать другим людям свои многочисленные дела и обязанности и занялась подготовкой к печати Марксовых математических рукописей.

Но в конце 1966 года ее не стало.

8

Однако ей удалось довести до конца свой более чем тридцатилетний труд. Сорок с лишним авторских листов— свыше тысячи машинописных страниц — дождались своего часа. К 150-летию со дня рождения Маркса, в 1968 году, мы смогли взять в руки этот весомый том.

...Рукописи лежат в ИМЛе — строгом здании на Советской площади и, кажется, хранят на себе тепло многих рук, которые бережно, как эстафету, пронесли их сквозь долгие годы. Энгельс, потом Рязанов, далее Гумбель, расшифровщики института Богдань и Вильдгабер, затем «бригада»: Яновская, Райков и Нахимовская, позже — Рыбников. И на протяжении многих лет постоянный интерес сотрудников ИМЛа — каждый, кто заведовал рукописями Маркса, вносил свою лепту в работу над ними и завещал это своему преемнику. Сначала это был В. А. Радус-Зенкович, потом — А. М. Бобков, теперь — О. К. Сенекина. Ольга Константиновне посчастливилось больше других — ей довелось довести до конца эту многолетнюю работу. Она — один из двух редакторов (второй — математик А. З. Рывкин, он работал над рукописями когда еще жива была С. А. Яновская) вышедшей в издательстве «Наука» книги К. Маркса «Математические рукописи». Разумеется, пока книга гото-

вилась к выпуску в свет, рукопись ее изучали и крупные специалисты-математики, об этом говорит и фраза из предисловия ИМЛа к ней: «При подготовке настоящего издания были учтены замечания и советы, высказанные академиками А. Н. Колмогоровым и И. Г. Петровским».

Труд этих и еще многих других, не названных здесь людей извлек пропыленные листки и тетради с чердака на далекой лондонской улице. Их настойчивая мысль проникла сквозь недописанные слова, неоконченные фразы, незавершенные замыслы.

«Труд подливает масло в лампу жизни, а мысль зажигает ее...» В «Капитале» Маркс нашел место для этих слов Джона Беллерса. Именно о людях труда и мысли думал Энгельс, пытаясь угадать будущих наследников своего архива.

Этой мечте Энгельса суждено было осуществиться в наше время. Рукописи Маркса попали «в надлежащие руки».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛЕВ КАТОЛИН

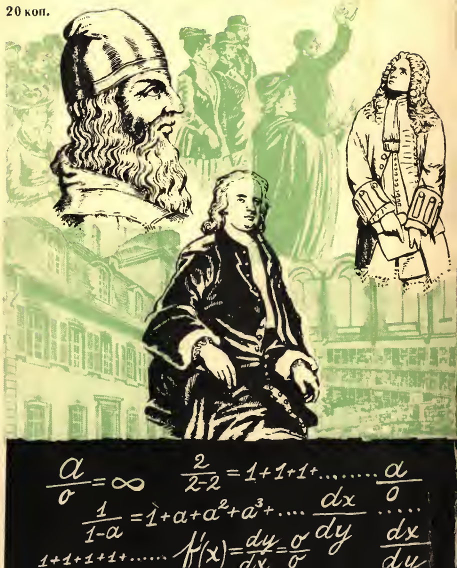
„Мы были тогда дерзкими парнями...“

Редактор *Н. Яснопольский*. Художник *Б. Акулиничев*. Худ. редактор *В. Конюхов*. Техн. редактор *Г. Качалова*. Корректор *С. Ткаченко*.

А 01918. Сдано в набор 3/III-1972 г. Подписано к печати I/XII-1972 г. Формат бумаги $70\times108^1/_{32}$. Бумага типографская № 3. Бум. л. 2,5. Печ. л. 5,0. Условн. печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 6,93. Тираж 100 000 экз. Издательство «Знание». Москва, Центр, Новая пл., д. 3/4. Заказ 949. Цена 20 коп.

Киевская книжная фабрика Республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, ул. Воровского, 24.

20 коп.



$\frac{a}{o} = \infty$
$\frac{2}{2-2} = 1+1+1+\dots\dots$
$\frac{a}{0}$
$\frac{1}{1-a} = 1+a+a^2+a^3+\dots$
$\frac{dx}{dy}$ ……
$1+1+1+1+\dots\dots$
$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$
dy
$\frac{dx}{dy}$